UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

56. BAND, 2. HEFT
MIT 1 TEXTABBILDUNG
(AUSGEGEBEN IM JULI 1952)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1952

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

56. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Rédei, L. Die Vollidealringe 89

Müller, H. R. Elliptisch-metrische Eigenschaften des Strahlgewindes 96

Prachar, K. Über einen Satz der additiven Zahlentheorie 101

Inzinger, R. Faltungsgeometrie im Hilbertschen Raume und in der Menge der stützbaren Bereiche einer Ebene 105

Höfinger, E. Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen 126

Knödel, W. Sätze über Primzahlen II 137

Müller, H. R. Der Satz von Malus und Dupin bei elliptischer Metrik und seine kinematische Deutung 144

Moór, A. Über die Scheitelpunkte der zwei- und dreidimensionalen Kurven . . . 150

Buchbesprechungen 164

Die Vollidealringe.

Von

L. Rédei, Szeged (Ungarn).

(Eingelangt am 18. September 1951.)

Man kennt seit Dedekind die Gruppen mit lauter normalen Untergruppen; diese sind außer den Abelschen Gruppen die sogenannten Hamiltonschen Gruppen, die letzteren sind das direkte Produkt aus der Quaternionengruppe und einer leicht angebbaren Abelschen Gruppe[1].

Ein ringtheoretisches Analogon bilden die Ringe, deren sämtliche Untermoduln (zweiseitige) Ideale sind, diese nennen wir *Vollidealringe*. Ein klassisches Beispiel bildet der Ring der ganzen Zahlen. Wir bestimmen alle Vollidealringe; es wird sich herausstellen, daß sie kommutativ und von leicht übersehbarer Struktur sind.

Bevor wir unseren diesbezüglichen Satz formulieren, schicken wir folgendes voran. Unter einem Zeroring verstehen wir einen Ring R, in dem alle Elementenprodukte verschwinden, d. h. $R^2 = 0$ ist. Trivial läßt sich aus jedem Modul ein Zeroring bilden, so daß in ihm das Produkt von zwei beliebigen Elementen α, β durch $\alpha\,\beta = 0$ definiert wird. Unter einem p-Ring (p Primzahl) verstehen wir einen Ring, in dem es zu jedem Element α eine Potenz p^e mit $p^e\,\alpha = 0$ gibt. Ein p-Zeroring bedeutet einen p-Ring, der auch ein Zeroring ist.

Satz. *Um alle Vollidealringe anzugeben, bezeichne $R(d, d_1)$ den Ring mit dem einzigen erzeugenden Element α und den definierenden Gleichungen*

$$d\,\alpha = 0,\quad \alpha^2 = d_1\,\alpha, \tag{1}$$

wobei d, d_1 beliebige ganze Zahlen sind. Die sämtlichen Vollidealringe sind dann die folgenden:

I. *Die Zeroringe.*

II. *Die direkten Summen aus einem $R(0, d_1)$ $(d_1 > 0)$ und einem Zeroring mit $d_1\,R = 0$.*

[1] *H. Zassenhaus*, Lehrbuch der Gruppentheorie, Berlin 1937. S. 123.

III. *Die über alle verschiedenen Primzahlen p erstreckten direkten Summen ΣR_p, wobei R_p entweder einen p-Zeroring oder die direkte Summe aus einem $R(p^e, p^f)$ $(0 \leqq f < e)$ und einem p-Zeroring R'_p mit $p^f R'_p = 0$ bezeichnet.*

Bemerkungen. Die Ringe $R(d, d_1)$ sind offenbar die sämtlichen zyklischen Ringe (d. h. Ringe mit zyklischem Modul); übrigens sind alle Fälle auch schon durch $d, d_1 \geqq 0, d_1 \mid d$ erfaßt. Bei dieser Annahme läßt sich $R(d, d_1)$ für $d_1 > 0$ durch den Unterring der Vielfachen von d_1 im Ring der ganzen Zahlen mod $d\,d_1$ realisieren. Auf geeignete solche Ringe und auf geeignete Zeroringe lassen sich nach unserem Satz die Vollidealringe direkt zerlegen.

Beweis. Griechische und lateinische Buchstaben bezeichnen stets die Elemente eines vorgelegten Ringes oder Moduls bzw. ganze Zahlen. Für einen Ring R bezeichne R^+ den Modul des Ringes. Stets bezeichne $o(\alpha)$ die (additive) Ordnung von α, die wir als die kleinste natürliche Zahl mit $o(\alpha)\,\alpha = 0$ definieren; wenn das sinnlos ist, dann und nur dann werde $o(\alpha) = 0$ gesetzt. Den durch die Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ erzeugten Modul bezeichnen wir mit $\{\alpha, \beta, \ldots\}$. Unabhängig nennen wir zwei Elemente α, β, wenn $x\alpha = y\beta \neq 0$ unmöglich ist.

Damit ein Ring R ein Vollidealring ist, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß unbeschränkt

$$\alpha\beta \in \{\alpha\}, \{\beta\} \qquad (\alpha, \beta \in R) \tag{2}$$

gilt.

Zuerst zeigen wir, daß unter I—III lauter Vollidealringe angegeben wurden. Für I ist das klar. Im Falle II lassen sich alle Ringelemente in der Form $i\alpha + \varrho$ annehmen mit

$$\alpha^2 = d_1\alpha,\ d_1\varrho = 0,\ \alpha\varrho = \varrho\alpha = 0,$$

wobei α ein festes Element bezeichnet und die ϱ einen Zeroring bilden. Für das Produkt von zwei solchen Elementen gilt dann

$$(i\alpha + \varrho)(k\alpha + \sigma) = ik\alpha^2 = ikd_1\alpha = kd_1(i\alpha + \varrho) = id_1(k\alpha + \sigma).$$

Dies bedeutet eben das Erfülltsein des Kriteriums (2) für diesen Fall. Im Falle III genügt es wegen des chinesischen Restsatzes, wenn wir zeigen, daß jedes R_p ein Vollidealring ist. Nur den Fall brauchen wir zu betrachten, daß R_p kein Zeroring ist. Dann lassen sich die Elemente von R_p mit einem festen α in der Form $i\alpha + \varrho$ annehmen, wobei

$$p^e\alpha = 0,\ \alpha^2 = p^f\alpha,\quad p^f\varrho = 0,\quad \alpha\varrho = \varrho\alpha = 0$$

und die ϱ einen Zeroring bilden. Für das Produkt von zwei solchen Elementen gilt

$$(i\alpha+\varrho)(k\alpha+\sigma)=ik\alpha^2=ikp^f\alpha=kp^f(i\alpha+\varrho)=ip^f(k\alpha+\sigma).$$

Wieder ist (2) erfüllt, womit wir gezeigt haben, daß im Satz unter I—III lauter Vollidealringe angegeben wurden.

Umgekehrt nehmen wir an, daß R ein Vollidealring ist; wir haben zu beweisen, daß R einer der Ringe in I—III ist. Dabei darf der Fall ausgeschlossen werden, daß R ein Zeroring ist, und dann muß einer der Fälle II, III herauskommen.

Im folgenden bezeichnen α, β zwei beliebige (gleiche oder verschiedene) Elemente von R. Wir setzen nach (2)

$$\alpha^2=a\alpha,\ \beta^2=b\beta. \tag{3}$$

Dabei ist a im Fall $o(\alpha)=0$ eindeutig bestimmt, im Fall $o(\alpha)>0$ kommt es auf den Wert von a nur mod $o(\alpha)$ an, aber wir dürfen a auch dann irgendwie festwählen. Das bezieht sich ähnlich auch auf b.

a Sind α, β unabhängig, so gilt nach (2)

$$\alpha\beta=\beta\alpha=0.$$

Insbesondere ist das stets der Fall, wenn $o(\alpha)=0$, $o(\beta)>0$ gilt oder wenn $o(\alpha)$, $o(\beta)$ relativ prim sind.

b Ist $o(\alpha)=o(\beta)=0$, so gilt

$$\alpha\beta=\beta\alpha=b\alpha=a\beta. \tag{4}$$

Setzen wir nämlich nach (2)

$$\alpha\beta=s\alpha=r\beta \tag{5}$$

an, so genügt es zu zeigen, daß $r=a$, $s=b$ ist, denn dann wird aus Symmetriegründen auch (4) richtig. Jedenfalls muß wegen der Annahme entweder $r=s=0$ oder $r, s\neq 0$ sein.

Erstens nehmen wir $a=0$ an. Dann ist nach (3) $\alpha^2=0$. Wir zeigen $\alpha\beta=0$. Im anderen Falle wäre nach (5)

$$\alpha\beta=s\alpha=r\beta\neq 0.$$

Hieraus folgt

$$\alpha^2\beta=r\alpha\beta=r^2\beta.$$

Die linke Seite ist 0, die rechte Seite ist $\neq 0$, dieser Widerspruch beweist $\alpha\beta=0$.

Dann gilt nach (5) $r=s=0$, somit haben wir nur noch $b=0$ zu zeigen. Hierzu nehmen wir $b\neq 0$, d. h. $\beta^2=b\beta\neq 0$ an. Wegen $\alpha\beta=0$ gilt dann

$$(\alpha + \beta)\beta = b\beta \neq 0.$$

Nach (2) muß also

$$b\beta = x(\alpha + \beta)$$

gelten. Wieder wegen $\alpha\beta = 0$ folgt hieraus $b\beta^2 = x\beta^2, b^2\beta = bx\beta (\neq 0)$ also $x = b$. Dies führt aber zum Widerspruch $b\alpha = 0$, womit $b = 0$ gezeigt wurde. Das beweist (4) für diesen Fall.

Zweitens sei $a \neq 0$. Nach vorigem muß dann $b \neq 0$ gelten. Wir zeigen $\alpha\beta \neq 0$. Im anderen Falle wäre mit $\alpha\beta = 0$ zusammen für jedes x

$$\alpha(\alpha + x\beta) = a\alpha (\neq 0).$$

Hieraus folgt nach (2) die Lösbarkeit von

$$a\alpha = x'(\alpha + x\beta)$$

für jedes x. Dies schreibt sich als

$$(a - x')\alpha = x x' \beta.$$

Dabei muß im Fall $x \neq 0$ wegen $o(\alpha) = o(\beta) = 0$ und $a \neq 0$ auch $x' \neq 0, a$ gelten. Hiernach sind α, β abhängig, folglich muß es zu jedem $x = 1, 2, \ldots$ ein x' geben, so daß

$$\frac{x x'}{a - x'}$$

konstant ist. Das ist nun falsch, denn diese Zahl bleibt nicht einmal beschränkt. Dies beweist $\alpha\beta \neq 0$.

Andererseits folgt aus (5)

$$\alpha\beta^2 = s\alpha\beta,$$

also nach (3) $b\alpha\beta = s\alpha\beta$. Da nun nach (5) wegen $\alpha\beta \neq 0$ gewiß $o(\alpha\beta) = 0$ ist, so folgt $s = b$. Aus Symmetriegründen gilt auch $r = a$, womit der Beweis von **b** beendet ist.

Bezeichne fortan M_o die Menge der Elemente von R von der Ordnung 0.

c Wenn M_o nicht leer ist, so gilt

$$\alpha\beta = 0 \qquad (o(\alpha), o(\beta) > 0). \tag{6}$$

Denn nehme man ein $\varrho \in M_o$. Wegen $o(\varrho) = 0$ gilt dann nach **a** $\alpha\varrho = 0$, ebenso auch $\alpha(\varrho + \beta) = 0$; aus beiden folgt (6).

d Wenn M_o leer ist, so gilt für zwei unabhängige α, β mit $o(\beta) \mid o(\alpha)$ stets

$$\beta^2 = 0, \; o(\beta) \mid a. \tag{7}$$

Nach **a** ist nämlich $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$. Also gilt nach (3)

$$(\alpha + \beta)\,\beta = \beta^2 = b\,\beta.$$

Hieraus folgt nach (2)

$$b\,\beta = x\,(\alpha + \beta)$$

mit passendem X. Da α, β unabhängig sind, muß $o\,(\alpha) \mid x$ also wegen $(\beta) \mid o\,(\alpha)$ auch $b\,\beta = 0$ gelten. Dies beweist nach (3) die erste Hälfte von (7).

Ferner gilt wegen $\alpha\,\beta = 0$

$$\alpha\,(\alpha + \beta) = \alpha^2 = a\,\alpha.$$

Hieraus folgt nach (2)

$$a\,\alpha = x\,(\alpha + \beta)$$

mit passendem x. Da α, β unabhängig sind, muß $o\,(\beta) \mid x$, $a\,\alpha = x\,\alpha$, also wegen $o\,(\beta) \mid o\,(\alpha)$ auch die zweite Hälfte von (7) gelten, womit d ewiesen ist.

Nunmehr betrachten wir zuerst den Fall, daß M_o nicht leer ist. lle Produkte $\alpha\,\beta$ verschwinden nach a und c, in denen α, β nicht beide n M_o gehören. Dagegen sind nach (3) und b entweder alle $\alpha\,\beta = 0$ oder lle $\alpha\,\beta \neq 0$ $(\alpha, \beta \,\varepsilon\, M_o)$. Im ersten Fall wäre R ein Zeroring (Fall I), omit bleibt nur noch der Fall übrig, wobei unbeschränkt

$$\alpha\,\beta \neq 0 \qquad (\alpha, \beta \,\varepsilon\, M_o) \tag{8}$$

lt. Wir bezeichnen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ beliebige Elemente von M_o. Nach (4) lt dann mit geeigneten $a_1, a_2, \ldots$ unbeschränkt

$$a_i\,\alpha_k = \alpha_k\,a_i = \alpha_k\,\alpha_i = a_i\,\alpha_k\,(\neq 0). \tag{9}$$

Dies ergibt die Formel

$$(c_1\,\alpha_1 + \ldots + c_n\,\alpha_n) = a_r\,(c_1\,\alpha_1 + \ldots + c_n\,\alpha_n) = \\ = (c_1\,a_1 + \ldots + c_n\,a_n)\,\alpha_r. \tag{10}$$

Wir bezeichnen mit $d\,(> 0)$ den größten gemeinsamen Teiler aller a_i. ann lassen sich die c_i so wählen, daß

$$d = c_1\,a_1 + \ldots + c_n\,a_n$$

lt. Wir setzen

$$\delta = c_1\,\alpha_1 + \ldots + c_n\,\alpha_n.$$

ach (10) gilt dann

$$\alpha_r\,\delta = a_r\,\delta = d\,\alpha_r, \tag{11}$$

lglich auch

$$\delta^2 = d\,\delta. \tag{12}$$

Wegen $d \mid a_i$ läßt sich

$$a_i = d\,a'_i \tag{13}$$

setzen. Für

$$\varrho = a_i - a'_i\,\delta \tag{14}$$

gilt dann nach (11), (12)

$$\varrho\,\delta = a_i\,\delta - a'_i\,\delta^2 = a_i\,\delta - d\,a'_i\,\delta.$$

Deshalb gilt nach (11) auch

$$\varrho\,\delta = d\,a_i - d\,a'_i\,\delta,$$

also nach (11), (13), (14)

$$d\,\varrho = 0. \tag{15}$$

Hiernach ist ϱ von positiver Ordnung. Dies bedeutet nach (14), daß sich R in der Form

$$R = \{\delta\} + R' \tag{16}$$

direkt zerlegen läßt, wobei R' den Unterring der Elemente positiver Ordnung bezeichnet, der nach obigem ein Zeroring ist. (Es ist zu bemerken, daß der Modul $\{\delta\}$ wegen (12) ein Ring ist.) Da sich ferner offenbar jedes Element ϱ von R' in der Form (14) schreiben läßt (nämlich z. B. als $\varrho = \varrho + \delta - \delta$), so gilt nach (15) $d\,R' = 0$. Dies mit (16), (12), a und e zusammen beweist, daß R einer der im Satz unter II angegebenen Ringe ist (der Unterschied ist bloß, daß d an Stelle von d_1 getreten ist).

Es ist noch der Fall übrig, daß M_o leer ist. Da jetzt alle Elemente von R von positiver Ordnung sind, so läßt sich R (eindeutig) in eine direkte Summe von p-Ringen zerlegen, die Bestandteile sind dann wieder Vollidealringe. Wir dürfen deshalb den noch fehlenden Teil des Beweises unter der Annahme führen, daß R ein p-Ring ist, und dann haben wir nachzuweisen, daß R eben einer der im Satz genannten Ringe R_p ist.

Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, daß R kein p-Zeroring ist. Zuerst zeigen wir die Unmöglichkeit der Annahme, daß es in R Elemente von beliebig großer Ordnung gibt. Dann gibt es nämlich zu jedem $n\ (= 1, 2, \ldots)$ auch ein $\alpha\ (\varepsilon\, R)$ mit $o\,(\alpha) = p^{2n}$. Für $\beta = p^n\,\alpha$ gilt dann $\beta^2 = 0$, $o\,(\beta) = p^n$. Wir haben vorläufig gezeigt, daß in R Elemente von beliebig großer Ordnung und verschwindendem Quadrat existieren. Betrachten wir zwei beliebige Elemente $\varrho, \sigma\ (\varepsilon\, R)$. Nach vorigem gibt es ein $\alpha\ (\varepsilon\, R)$ mit

$$o\,(\alpha) > o\,(\varrho),\ o\,(\sigma) \tag{17}$$

$$\alpha^2 = 0. \tag{18}$$

Der Modul $\{\alpha, \varrho, \sigma\}$ läßt sich durch drei unabhängige Elemente α, β, γ erzeugen. Dann gelten

$$o(\alpha) > o(\beta),\ o(\gamma),$$

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma,\ \sigma = x'\alpha + y'\beta + z'\gamma.$$

Wegen **a** ergeben zwei verschiedene von α, β, γ stets das Produkt 0. Nach (18) und **d** gilt auch $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 0$. Hieraus folgt $\varrho\,\sigma = 0$, dies bedeutet aber $R^2 = 0$, wobei doch angenommen wurde, daß R kein Zeroring ist. Folglich ist $o(\alpha)$ in R beschränkt.

Nunmehr werde δ in R so festgewählt, daß $o(\delta)$ maximal ist. Wir setzen

$$o(\delta) = p^e \qquad (e \geqq 1). \tag{19}$$

Offenbar darf

$$\delta^2 = p^f \delta \qquad (0 \leqq f \leqq e) \tag{20}$$

angenommen werden. Nach bekanntem Satz läßt sich R^+ in eine direkte Summe

$$R^+ = \{\alpha\} + M \tag{21}$$

zerlegen. Nach **d** gilt

$$\beta^2 = 0 \qquad (\beta \varepsilon M). \tag{22}$$

Für zwei beliebige Elemente ϱ, σ (εM) läßt sich

$$\varrho = x\beta + y\gamma,\ \sigma = x'\beta + y'\gamma$$

einsetzen, wobei β, γ unabhängige Elemente von M sind. Nach (22) gilt dann $\beta^2 = \gamma^2 = 0$, ferner gilt nach **a** $\beta\gamma = \gamma\beta = 0$, folglich haben wir $\varrho\,\sigma = 0$. Hieraus und aus **a** folgt, daß der Zerlegung (21) von R^+ die ebenfalls direkte Zerlegung

$$R = \{\delta\} + R_1 \tag{23}$$

mit $R_1^+ = M$) entspricht, wobei außerdem R_1 ein Zeroring ist und wegen (19), **d** auch

$$p^f R_1 = 0$$

gilt. Da R kein Zeroring ist, so darf das erste Glied auf der rechten Seite von (23) auch kein Zeroring sein. Dies bedeutet nach (19), (20) $f < e$. Wir haben gezeigt, daß R jetzt ein R_p des Satzes ist, womit wir den Beweis beendet haben.

Elliptisch-metrische Eigenschaften des Strahlgewindes.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 8. Oktober 1951.)

Ein Strahlgewinde oder linearer Strahlkomplex — der Begriff als solcher ist projektiven Ursprungs — besitzt metrische Eigenschaften, die für eine euklidische Maßbestimmung wohl bekannt sind[1]. Es erscheint für manche Zwecke, wie auch an sich wertvoll, die entsprechenden Beziehungen bei Zugrundelegung einer elliptischen Metrik zu kennen.

Wir gehen von *Plücker*schen Linienkoordinaten g_{jk} in einem projektiven Raum aus und fassen diese zu zwei Vektoren zusammen[2]:

$$\mathfrak{g} = e_1 g_{01} + e_2 g_{02} + e_3 g_{03}, \quad \bar{\mathfrak{g}} = e_1 g_{23} + e_2 g_{31} + e_3 g_{12}. \tag{1}$$

Die *Plücker*sche Identität schreibt sich in der Form:

$$(\mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{g}}) = 0. \tag{2}$$

Ein Strahlgewinde werde durch

$$(\bar{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{g}) + (\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{g}}) = 0 \tag{3}$$

gegeben; es sei nicht entartet, d. h. es gelte

$$(\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{w}}) \neq 0. \tag{4}$$

Die Spiegelung am Gewinde $\{\mathfrak{w}, \bar{\mathfrak{w}}\}$ führt eine beliebige Gerade $\{\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}\}$ über in die Gerade $\{\mathfrak{g}^*, \bar{\mathfrak{g}}^*\}$ mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^* &= \{(\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{g}}) + (\bar{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{g})\}\,\mathfrak{w} - (\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{w}})\,\mathfrak{g}\} \\ \bar{\mathfrak{g}}^* &= \{(\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{g}}) + (\bar{\mathfrak{w}}\,\mathfrak{g})\}\,\bar{\mathfrak{w}} - (\mathfrak{w}\,\bar{\mathfrak{w}})\,\bar{\mathfrak{g}}\} \end{aligned} \tag{5}$$

Begründen wir auf der Quadrik

$$x_0^2 + x_1^2 + x^2{}_2 + x_3^2 = 0 \tag{6}$$

als absolutem Gebilde eine elliptische Maßbestimmung, so kann der

[1] Vgl. etwa Enz. Math. Wiss. III C 8/7.

[2] Vgl. *W. Blaschke*, Analytische Geometrie (Wolfenbütteler Verlag. 1948).

Geraden $\{\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}\}$ nach *Fubini, Petersen* = *Hjelmslev* und *Study* bei Vornahme einer Normierung, wie Orientierung ein geordnetes Paar von Einheitsvektoren $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ zugeordnet werden, die zum „linken" bzw. „rechten" sphärischen Bildpunkt unserer Geraden weisen[3]. Wir brauchen hierzu nur zu setzen:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{g} + \bar{\mathfrak{g}}, \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{g} - \bar{\mathfrak{g}}. \tag{7}$$

In gleicher Weise gehen wir vom Vektorpaar $\mathfrak{w}, \bar{\mathfrak{w}}$ über zu

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} + \bar{\mathfrak{w}}, \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{w} - \bar{\mathfrak{w}} \tag{8}$$

und können nun die Gleichungen (2) bis (5) in folgender Weise schreiben:

$$(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}) - (\mathfrak{r}'\,\mathfrak{r}') = 0 \tag{2'}$$

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) - (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}') = 0 \tag{3'}$$

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) - (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{v}') \neq 0 \tag{4'}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}^* &= 2\{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) - (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')\}\,\mathfrak{v} - \{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) - (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{v}')\}\,\mathfrak{r} \\ \mathfrak{r}^{*\prime} &= 2\{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) - (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')\}\,\mathfrak{v}' - \{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) - (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{v}')\}\,\mathfrak{r}' \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Hiebei ist zu beachten, daß $\mathfrak{r}^*$ und $\mathfrak{r}^{*\prime}$ noch nicht normiert sind, während

$$(\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{r}'\,\mathfrak{r}') = 1 \tag{9}$$

gelte. Wir setzen

$$(\mathfrak{r}^*\,\mathfrak{r}^*) = (\mathfrak{r}^{*\prime}\,\mathfrak{r}^{*\prime}) = \mu^2. \tag{10}$$

Die *Gewinde-Achsen* sind nun jenes Geradenpaar, das sowohl spiegelbildlich bezüglich des Gewindes, als auch polar bezüglich der absoluten Quadrik ist. Dies führt somit zum Ansatz

$$\mathfrak{r}^* = \mu\,\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{r}^{*\prime} = -\mu\,\mathfrak{r}', \tag{11}$$

woraus wegen (5') folgt

$$\mathfrak{v} = v\,.\,\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{v}' = v'\,.\,\mathfrak{r}' \tag{12}$$

mit

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}) = v^2, \ (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{v}') = v'^2, \ \mu = (v - v')^2. \tag{13}$$

Als Achsen des Gewindes (3') fungieren somit bei elliptischer Metrik die beiden Geraden $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}']$, $[\mathfrak{a}, -\mathfrak{a}']$ mit

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v})}} = \frac{\mathfrak{v}}{v}, \quad \mathfrak{a}' = \frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{v}')}} = \frac{\mathfrak{v}'}{v'}. \tag{14}$$

---

[3] Vgl. für das Folgende *W. Blaschke*, Nicht-Eukl. Geometrie u. Mechanik I—III, Hamb. Math. Einzelschr. 34. Heft (1942).

Führen wir für einen beliebigen Gewindestrahl $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ die Winkel φ, φ' mit

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}) = \cos\varphi, \quad (\mathfrak{a}'\,\mathfrak{r}') = \cos\varphi' \tag{15}$$

ein, so geht wegen (13), (14) die Gewindegleichung (3′) über in

$$v \,.\, \cos\varphi - v' \,.\, \cos\varphi' = 0. \tag{16}$$

Für die *stationären Abstände* δ_1 und δ_2 der Gewindeachse $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}']$ und des Strahles $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ gilt

$$\varphi = \delta_2 + \delta_1, \quad \varphi' = \delta_2 - \delta_1. \tag{17}$$

Die entsprechenden Werte für die polare Achse $[\mathfrak{a}, -\mathfrak{a}']$ unterscheiden sich nur um $\pm\pi/2$. — Führen wir die stationären Abstände in (16) ein, so erhalten wir schließlich

$$\operatorname{tg}\delta_1 \,.\, \operatorname{tg}\delta_2 = \frac{v - v'}{v + v'} = k, \tag{18}$$

wo k eine Gewindekonstante (Steigung) ist.

Gehört nun die Gerade $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ nicht dem Gewinde an, so besitzt sie ein von ihr verschiedenes Spiegelbild $[\mathfrak{r}^*, \mathfrak{r}^{*\prime}]$, das durch (5′) gegeben ist. Spiegelbildliche Gerade sind aber Leitlinien eines Strahlnetzes (lineare Kongruenz), das ganz im Gewinde liegt. Somit sind auch die beiden gemeinsamen Normalen $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}']$ und $[\mathfrak{n}, -\mathfrak{n}']$ Gewindestrahlen; sie treffen die Gewindeachsen senkrecht, wie man aus (14), sowie

$$\mathfrak{n} = \lambda_1 (\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}^*) = \lambda_2 (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}), \quad \mathfrak{n}' = \lambda_1' (\mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}^{*\prime}) = \lambda_2' (\mathfrak{r}' \times \mathfrak{v}') \tag{19}$$

sofort ersieht. (λ_i, λ_i' sind geeignete Normierungsfaktoren.) Dem Gewinde gehören aber auch die beiden noch möglichen Verbindungslinien der vier Fußpunkte an, die die gemeinsamen Normalen auf den spiegelbildlichen Ausgangsgeraden ausschneiden. Für sie gilt somit die Formel (18) oder

$$\operatorname{tg}\delta_1 \,.\, \operatorname{tg}\delta_2^* = \operatorname{tg}\delta_1^* \,.\, \operatorname{tg}\delta_2 = k \tag{20}$$

Hiebei sind jetzt δ_i bzw. δ_i^* die stationären Abstände der spiegelbildlichen Geraden $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$ bzw. $[\mathfrak{r}^*, \mathfrak{r}^{*\prime}]$ von den Achsen des Gewindes. Unterscheiden sich auf einer der beiden gemeinsamen Normalen die stationären Abstände um $\pi/2$, gilt also für ein spiegelbildliches Geradenpaar etwa $\delta_2^* = \delta_2 + \pi/2$, so folgert man sofort

$$\operatorname{tg}\delta_1 \,.\, \operatorname{tg}\delta_1^* = -k^2. \tag{21}$$

Zu den Formeln (18), (20) und (21) gibt es euklidische Gegenstücke.

K. Zindler erklärte auf *M. Chasles* fußend ein Strahlgewinde im euklidischen Raum als Gesamtheit der Bahnnormalen aller Raumpunkte, die einer Schraubung unterworfen werden. Die Normalebenen der Bahnschraublinien sind dann die Nullebenen der betreffenden Punkte. — In Übertragung dieser euklidisch-metrischen Eigenschaften stellen wir eine Schraubung des elliptischen Raumes mittels genormter Quaternionen dar:

$$\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{C}} \,.\, \mathfrak{P}_0 \,.\, \mathfrak{C}' \tag{22}$$

mit

$$\mathfrak{C} = \cos\sigma + \mathfrak{a}\sin\sigma, \quad \mathfrak{C}' = \cos\sigma' + \mathfrak{a}'\sin\sigma'. \tag{23}$$

Hiebei wird der Punkt $\mathfrak{P}_0$ (Quaternion $\mathfrak{P}_0$ mit der Norm $(\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_0) = 1$) in den Punkt $\mathfrak{P}$ verschraubt. $\varphi = \sigma - \sigma'$ fungiert als Schiebwinkel, $\psi = \sigma + \sigma'$ als Drehwinkel. Die Schraubachsen sind $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}']$, $[\mathfrak{a}, -\mathfrak{a}']$. Eine kontinuierliche Schraubung liegt vor, wenn σ und σ' sich so stetig ändern, daß der Schraubparameter

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma + \sigma'} \tag{24}$$

und somit auch $\dfrac{\sigma}{\sigma'}$ und $\dfrac{d\sigma}{d\sigma'}$ fest sind. $\mathfrak{P}_0$ ist dann Ausgangslage des eine Schraublinie durchlaufenden Punktes $\mathfrak{P}$. Die Bahntangente wird durch

$$d\mathfrak{P} = d\overline{\mathfrak{C}} \,.\, \mathfrak{P}_0 \,.\, \mathfrak{C}' + \overline{\mathfrak{C}} \,.\, \mathfrak{P}_0 \,.\, d\mathfrak{C}' = d\overline{\mathfrak{C}} \,.\, \mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{P} + \mathfrak{P} \,.\, \overline{\mathfrak{C}}' \,.\, d\mathfrak{C}' \tag{25}$$

bestimmt, wobei wir wegen (22) finden

$$\left.\begin{aligned} d\overline{\mathfrak{C}} \,.\, \mathfrak{C} &= \mathfrak{C} \,.\, d\overline{\mathfrak{C}} = -\mathfrak{a}\, d\sigma \\ d\overline{\mathfrak{C}}' \,.\, \mathfrak{C}' &= \mathfrak{C}' \,.\, d\overline{\mathfrak{C}}' = -\mathfrak{a}'\, d\sigma' \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Normalebene der Bahn des Punktes $\mathfrak{P}$ besitzt daher die Gleichung[4]:

$$(\mathfrak{Q}\, d\mathfrak{P}) = 0 \tag{27}$$

oder

$$(\mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\,\mathfrak{P}\,\overline{\mathfrak{Q}})\, d\sigma + (\mathfrak{P}\,\mathfrak{a}'\,\overline{\mathfrak{Q}} - \mathfrak{Q}\,\mathfrak{a}'\,\overline{\mathfrak{P}})\, d\sigma' = 0. \tag{27'}$$

Diese in den Koordinaten von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bilineare Gleichung formen wir noch etwas um:

$$(\overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{Q} - \overline{\mathfrak{Q}}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{P})\, d\sigma + (\mathfrak{P}\,\mathfrak{a}'\,\overline{\mathfrak{Q}} - \mathfrak{Q}\,\mathfrak{a}'\,\overline{\mathfrak{P}})\, d\sigma' = 0. \tag{27''}$$

---

[4] $\mathfrak{Q}$ fungiere hiebei als laufender Punkt. Das „Skalarprodukt" zweier Quaternionen ist erklärt durch:

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{x}\,\overline{\mathfrak{y}} + \mathfrak{y}\,\overline{\mathfrak{x}}\}.$$

Nun erkennen wir unmittelbar, daß die Zuordnung „Raumpunkt $\leftrightarrow$ Bahnnormalebene" eine Involution ist. (Vertauschbarkeit von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$.) Es liegt somit in dieser Zuordnung ein Nullsystem vor, woraus sofort der Gewindecharakter der Bahnnormalen folgt.

Unterwirft man eine Gerade $[\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_0']$ der Schraubung (22), so gilt

$$\mathfrak{r} = \overline{\mathfrak{C}}\, \mathfrak{r}_0\, \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{r}' = \overline{\mathfrak{C}}'\, \mathfrak{r}_0'\, \mathfrak{C}'. \tag{28}$$

Hieraus schließt man wegen (14) und (23) leicht, daß ein Gewinde durch sämtliche Schraubungen um seine Achsen in sich übergeht.

Formel (14) versagt zur Bestimmung der Gewindeachsen, wenn v' oder v verschwinden, d. h. bei Beschränkung auf das reelle Gebiet $\mathfrak{v}' = 0$ oder $\mathfrak{v} = 0$ sind. In diesen Fällen vereinfachen sich (3′) und (5′) und gilt $k = \pm 1$. Das Gewinde gestattet nun eine Zerlegung in ∞^1 Netze von links-(rechts-)parataktischen Geraden (*Clifford*schen Parallelen). Da lediglich $\mathfrak{a}$ (bzw. $\mathfrak{a}'$) bestimmbar ist, fungieren die Strahlen eines ebensolchen Netzes als „Achsen". Wegen (5′) sind spiegelbildliche Gerade bei geeigneter Orientierung rechts-(links-)parataktisch.

Über einen Satz der additiven Zahlentheorie.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 15. Oktober 1951.)

1. Einleitung.

Romanoff[1] hat folgenden wichtigen Satz gefunden: Sei a eine fest gegebene ganze Zahl > 1. p soll alle Primzahlen und i alle ganzen Zahlen $\geqq 0$ durchlaufen. *Dann hat die Menge der Zahlen* $p + a^i$ *positive Dichte*, d. h. für die Anzahl $A(x)$ der verschiedenen $p + a^i > x$ gilt $A(x) > c\,x$, bei passendem von x unabhängigen $c = c(a) > 0$[2]. Das besondere Interesse an diesem Satz liegt, wie bekannt, an folgender Tatsache: Die Anzahl der $p < x$ bzw. der $a^i < x$ ist $> c\,x / \log x$ bzw. $> c \log x$. Daher ist die Gesamtzahl der Lösungen von $p + a^i < x$ jedenfalls $> (c\,x / \log x)(c \log x) = c\,x$. Der obige Satz zeigt, daß es sogar mehr als $c \,.\, x$ *verschiedene* Zahlen $p + a^i < x$ gibt. Bei anderen Problemen der additiven Zahlentheorie gilt das Analoge oft nicht, wie schon das Beispiel der ganzen Zahlen der Form $x^2 + y^2$ (x, y ganz), zeigt (hier ist [Anzahl der $x^2 < n$] $> c\sqrt{n}$, [Anzahl der $y^2 < n$] $> c\sqrt{n}$ aber die Anzahl der verschiedenen $x^2 + y^2 < n$ ist nicht etwa $> (c\sqrt{n})(c\sqrt{n}) = cn$, sondern $< c\,n / \sqrt{\log n}$ [3]).

Es soll nun folgender Satz gezeigt werden, der den *Romanoff*schen als Spezialfall enthält:

Satz: *Sei* $0 \leqq k_0 < k_1 < \ldots$ *eine monoton wachsende Folge positiver ganzer Zahlen. Sei* $k(x)$ *die Anzahl der verschiedenen* $a^{k_i} \leqq x$, *wo* a *wieder eine feste ganze Zahl* > 1 *ist. Wenn dann* $R(x) =$ *Anzahl der verschiedenen* $p + a^{k_i} < x$, *so gilt*

---

[1] Math. Ann. **109** (1934) p. 668.

[2] Mit c wird durchwegs eine positive von x unabhängige Konstante bezeichnet, deren Wert nicht immer der gleiche zu sein braucht.

[3] Vgl. etwa *Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. 2.

$$R(x) > c\, x\, k(x) / \log x \tag{1}$$

Es seien einige Spezialfälle dieses Satzes angeführt: Setzt man $k = i^m$, m fest > 0, ganz, so hat man

Corrolar 1: *Es gibt in* (O, N) *mehr als* $c\, N / (\log N)^{1-\frac{1}{m}}$ *Zahlen, die in der Form* $p + a^{i^m}$ *darstellbar sind.*

Setzt man $k_i = b^i$ mit b fest > 1 ganz, so hat man

Corrolar 2: *Es gibt in* (O, N) *mehr als* $c\, N \log\log N / \log N$ *Zahlen der Form* $p + a^{b^i}$.

2. Beweis des Satzes.

Beim Beweis des Satzes werden die Methoden von *Romanoff* verwendet. In der Form der Darstellung schließen wir an diejenige an, die *Landau* in seinem Buche „Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie" (dieses Werk werde kurz mit „*Landau*" zitiert) gibt. Wir schicken dem Beweis zwei Hilfssätze voraus. F sei eine Menge natürlicher Zahlen $\leqq x$ (wo $x > c$).Mit $f, f', f'', \ldots$ sollen Zahlen aus F bezeichnet werden. Ferner soll für $u > 0$, ganz, gesetzt werden

$$g(u) = \sum_{q|u} \frac{1}{q}$$

wo q alle quadratfreien Teiler von u durchläuft. Dann gilt

Hilfssatz 1:

Sei $F(u)$ die Lösungszahl von $f' - f'' = u$, $S(x)$ diejenige von $p + f \leqq x$, $R(x)$ die Anzahl der verschiedenen $p + f \leqq x$. Sei noch $0 < T(x) \leqq S(x)$. Dann ist

$$T^2 < c\, R\left(T + \sum_{u=1}^{x} g(u)\, F(u)\right) \tag{2}$$

Beweise siehe *Landau*, Satz 99—101.

Hilfssatz 2:

Für jedes quadratfreie q mit $(q, a) = 1$ sei $l(q)$ der Exponent, zu dem a mod q gehört. Dann konvergiert

$$\sum_{\substack{q=1 \\ (q,a)=1}}^{\infty} \frac{1}{q\, l(q)} \tag{3}$$

Beweis: siehe *Landau*, Satz 105.

Beweis des Satzes:

In Hilfssatz 1 sei F die Menge aller $a^{k_i} \leqq x$. Für diese k_i ist, wenn noch $\bar{a} = (\log a)^{-1}$ gesetzt wird, $k_i \leqq \bar{a}\, x$. Weiters hat man hier, wenn $0 < \alpha < 1$,

$$S = \sum_{p+a^{k_i} \leqq x} 1 \geqq \sum_{p<(1-\alpha)x} 1 \;.\; \sum_{a^{k_i} \leqq \alpha x} 1 \geqq \pi((1-\alpha)x) \;.\; k(\alpha x) \geqq c\, x\, k(x) / \log x$$

Es ist ja $k(\alpha x) > c\, k(x)$ wegen

$$\sum_{a^{k_i} \leqq \alpha x} 1 = \sum_{k_i \leqq \bar{a}(\log x + \log \alpha)} 1 \geqq \sum_{k_i \leqq \bar{a} \log x} 1 - (\bar{a} \log \alpha^{-1} + 1) \geqq c\, k(x).$$

Ferner hat man

$$\sum_{u=1}^{x} g(u) F(u) = \sum_{0 \leqq k_j < k_i \leqq \bar{a} \log x} g(a^{k_i} - a^{k_j}),$$

$$g(a^{k_i} - a^{k_j}) = g(a^{k_j})\, g(a^{k_i - k_j} - 1) \leqq g(a)\, g(a^{k_i - k_j} - 1),$$

also

$$\sum_{a=1}^{x} g(u) F(u) \leqq g(a) \sum_{0 < h < \bar{a} \log x} g(a^h - 1) \;.\; \sum_{\substack{0 \leqq k_i < k_j \leqq \bar{a} \log x \\ k_i - k_j = h}} 1 \leqq g(a)\, k(x) \sum_{0 < h \leqq \bar{a} \log x} g(a^h - 1),$$

da zu jedem $k_i \leqq \bar{a} \log x$ bei festem h höchstens ein k_j mit $k_i - k_j = h$ gehört. Der letzte Ausdruck ist weiter

$$\leqq c\, k(x) \sum_{0 < h \leqq \bar{a} \log x} \sum_{q \mid a^h - 1} \frac{1}{q} \leqq c\, k(x) \sum_{q \leqq x} \frac{1}{q} \sum_{h=1}^{[\bar{a} \log x]} 1.$$

Wenn $(q, a) > 1$, ist rechts $\sum_h = 0$. Wenn $(q, a) = 1$, ist h ein Vielfaches von $l(q)$ und

$$\sum_h \leqq \frac{\bar{a} \log x}{l(q)}.$$

Nach Hilfssatz 2 ist also

$$\sum_{u=1}^{x} g(u) F(u) \leqq c\, k(x) \log x \sum_{\substack{q \leqq x \\ (q,a)=1}} \frac{1}{q\, l(q)} \leqq c\, k(x) \log x.$$

Nach Hilfssatz 1 mit $T = c\, x\, k(x) / \log x$ ist

$$c\,\frac{x^2\,k^2(x)}{\log^2 x} < R\left(c\,\frac{x\,k(x)}{\log x} + c\,\frac{x}{\log^2 x}\;k(x)\;\log x\right)$$
$$< c\,R\,\frac{x\,k(x)}{\log x},$$

also $R(x) > c\,x\,k(x) / \log x$, wie behauptet wurde.

Faltungsgeometrie im Hilbertschen Raume und in der Menge der stützbaren Bereiche einer Ebene.

Von

Rudolf Inzinger, Wien.

(Eingelangt am 20. November 1951.)

1. Einleitung.

Den folgenden Betrachtungen liegt die geometrische Realisierung des Funktionenraumes $L^2\,(0{,}2\,\pi)$ in der Menge H der stützbaren Bereiche einer Ebene Π zugrunde. Die Bereiche der Menge H ergeben sich bekanntlich dadurch, daß aus jeder Klasse äquivalenter Funktionen aus L^2 eine eindeutig bestimmte Repräsentantenfunktion $a\,(\varphi)$ ausgewählt und diese sodann in der Ebene Π als Stützfunktion eines Bereiches A gedeutet wird. Es ist andererseits auch wohlbekannt, daß die Klassen äquivalenter Funktionen aus L^2 als die Vektoren $\mathfrak{A}$ eines abstrakten *Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$ aufgefaßt werden können. Die zweifache Möglichkeit der Deutung der Funktionen aus L^2 vermittelt sodann eine eineindeutige Abbildung Σ der Vektoren $\mathfrak{A}$ des *Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$ auf die stützbaren Bereiche A der Ebene Π

$$A = \Sigma\,\mathfrak{A} \tag{1}$$

die in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert ist. Zunächst gestattet die Abbildung Σ alle Aussagen, die sich auf die Elemente einer der Mannigfaltigkeiten L^2, $\mathfrak{H}$, H beziehen, in jeder anderen dieser Mannigfaltigkeiten zu interpretieren. Insbesondere ergibt sich dadurch eine Realisierung der Geometrie des *Hilbert*schen Raumes in der Menge H der stützbaren Bereiche der Ebene Π[1].

Die Abbildung Σ ist in einem hohen Maße willkürlich und zunächst kaum vor irgend einer anderen geometrischen Deutung der Funk-

[1] Hierüber habe ich in einem am 27. IV. 1950 an der Universität in Rom gehaltenen Vortrag berichtet. Eine auszugsweise Wiedergabe desselben enthält die Note [7].

tionen $a(\varphi)$ aus L^2 ausgezeichnet. Ein wichtiger Grund für die Bevorzugung gerade dieser Deutung besteht jedoch darin, daß die Abbildung Σ auch rein geometrisch erklärt werden kann, sofern in $\mathfrak{H}$ in geeigneter Weise ein Abbildungsmittel[2] Σ ausgewählt wird, das aus einer einparametrigen Schar von Büscheln paralleler Hyperebenen besteht. Die durch den Endpunkt eines Vektors $\mathfrak{A}$ gehenden Hyperebenen bilden dann den Hyperkegel $\varkappa(\mathfrak{A})$ der die Bildebene Π nach dem entsprechenden Bereich A schneidet. *Die dadurch vermittelte Abbildung* (1) *der Vektoren* $\mathfrak{A}$ *aus* $\mathfrak{H}$ *auf die stützbaren Bereiche* A *der Menge* H *der Ebene* Π *wird im folgenden als die spezielle Kegelprojektion* Σ *des Hilbertschen Raumes* $\mathfrak{H}$ *bezeichnet.*

In dieser Auffassung erweist sich die spezielle Kegelprojektion Σ als die naturgemäße Verallgemeinerung der sogenannten zyklographischen Abbildung, die bekanntlich den Punkten des dreidimensionalen Raumes die orientierten Kreise der Ebene zuordnet. Die Abbildung Σ kann überdies so eingerichtet werden, daß sie für einen geeignet gewählten dreidimensionalen Unterraum von $\mathfrak{H}$ mit der zyklographischen Abbildung dieses Raumes übereinstimmt und gleichzeitig auch alle endlichdimensionalen Verallgemeinerungen der zyklographischen Abbildung umfaßt. Hierbei werden die Vektoren gewisser Räume $\mathfrak{R}_{2n+1}$ von ungerader Dimension $2n+1$ auf die sogenannten Polynombereiche der Ordnung n abgebildet, deren Stützfunktionen die trigonometrischen Polynome dieser Ordnung sind. Die stützbaren Bereiche der Menge H sind somit in diesem Sinne als Polynombereiche von unendlich hoher Ordnung aufzufassen, deren Stützfunktionen sodann durch die trigonometrischen Reihen aus L^2

$$a(\varphi) = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu\varphi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\varphi + a_\nu'' \sin \nu\varphi) \qquad (2)$$

bestimmt sind[3]. Die aus dem Konvergenzverhalten dieser Reihen entspringenden Schwierigkeiten werden in der Weise behoben, daß im folgenden jede Summenbildung einer unendlichen Reihe stets im Sinne der *Cesaro*schen Mittel erster Ordnung verstanden werden soll. Die Reihe (2) bestimmt daher eindeutig eine für fast alle Argumente

[2] Für das Abbildungsmittel und für die dadurch bestimmte Abbildung wird im folgenden das gleiche Zeichen Σ verwendet.

[3] Stützbare Bereiche treten in einem engeren Sinne u. a. in den Arbeiten *H. Brunn* [1], *H. Geppert* [2], *H. Görtler* [3], [4], *R. Inzinger* [5], [6], *J. v. Sz. Nagy* [8] auf.

$0 \leqq \varphi < 2\pi$ definierte Funktion $a(\varphi)$ als Repräsentanten ihrer Klasse äquivalenter Funktionen aus L^2. Im folgenden sind lediglich diese Repräsentantenfunktionen aus L^2 von Interesse, ohne daß jedes Mal auf diese Beschränkung besonders hingewiesen wird. Zwischen ihnen und den Koeffizienten ihrer Fourierreihen (2)

$$a_0 = a_0, \quad a_\nu = a_\nu' - i a_\nu'', \quad a_{-\nu} = a_\nu' + i a_\nu'', \nu = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

besteht sodann eine eineindeutige Zuordnung. Die Koeffizienten (3) werden daher im folgenden auch als die reellen bzw. komplexen Koordinaten entsprechender Elemente aus L^2, $\mathfrak{H}$, H bezeichnet.

In der vorliegenden Note sollen vor allem für die Faltungsrelation $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{A}$ *im Hilbertschen Raum* $\mathfrak{H}$ *und für die entsprechende Beziehung* $B = T\,A$ *in der Menge* H *der stützbaren Bereiche der Ebene* Π *geometrische Deutungen angegeben werden.* Hierfür erweist es sich als zweckmäßig, zunächst die *allgemeine Kegelprojektion* $B = \Sigma_{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{A}$ *des Hilbertschen Raumes* $\mathfrak{H}$ zu untersuchen, die dadurch zustande kommt, daß jeder Vektor $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{H}$ mit einem festen Vektor $\mathfrak{T}$ gefaltet und der Produktvektor $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{A}$ sodann vermöge der speziellen Kegelprojektion Σ auf den stützbaren Bereich B der Ebene Π abgebildet wird. Es erscheint bemerkenswert, daß diese durch den Vektor $\mathfrak{T}$ bestimmte Abbildung $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ auch unmittelbar und rein geometrisch in einer der speziellen Kegelprojektion Σ völlig analogen Weise erklärt werden kann. Damit steht sodann das geeignete Hilfsmittel zur geometrischen Deutung der Faltungsrelationen in $\mathfrak{H}$ und H zur Verfügung. In einer folgenden Note soll an diese Betrachtungen angeknüpft werden, um geometrische Deutungen für die beschränkten linearen Transformationen vom Faltungstypus im *Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$ und in der Menge H der stützbaren Bereiche der Ebene Π anzugeben.

2. Vektoren und stützbare Bereiche.

Die Metrik aus L^2 sowie alle daraus abgeleiteten Begriffsbildungen übertragen sich in ihrem vollen Umfange auf den *Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$, bzw. auf die Menge H der stützbaren Bereiche der Ebene Π. Durch

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (A, B) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(\varphi)\, b(\varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \alpha_\nu \beta_{-\nu}$$

wird zunächst das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{H}$ bzw. ihrer Bildbereiche A und B aus H definiert, das für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ bzw. $B = A$

nicht negativ ist und als das Quadrat des absoluten Betrages $|\mathfrak{A}| = |A|$ von $\mathfrak{A}$, bzw. A bezeichnet wird. Daraus folgt dann in bekannter Weise die euklidische Metrik von $\mathfrak{H}$ bzw. H.

Die Konvergenz einer Vektorfolge aus $\mathfrak{H}$ bzw. einer Bereichsfolge aus H wird im Sinne der Abstandsmessung, somit also als Mittelkonvergenz der entsprechenden Funktionenfolge aus L^2 erklärt. Jeder Vektor $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{H}$, sowie jeder Bereich A aus H kann sodann als die konvergente Folge

$$\mathfrak{A} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)},\ A = \lim_{n\to\infty} A^{(n)},\ a(\varphi) = \text{l. i. m.}_{n\to\infty}\, a^{(n)}(\varphi)$$

der Partialsummen

$$\mathfrak{A}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{A}_\nu,\ A^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu,\ a^{(n)}(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\varphi) \tag{4}$$

aus seinen Komponenten $\mathfrak{A}_\nu$, A_ν aufgefaßt werden; die Komponenten $a_\nu(\varphi)$ der Funktion $a(\varphi)$ erweisen sich dabei als die Glieder

$$a_0(\varphi) = \frac{a_0}{2},\ a_\nu(\varphi) = \tfrac{1}{2}(\alpha_\nu e^{i\nu\varphi} + \alpha_{-\nu} e^{-i\nu\varphi}) = a_\nu' \cos\nu\varphi + a_\nu'' \sin\nu\varphi \tag{5}$$

ihrer Fourierreihe (2).

Die reinen trigonometrischen Polynome (5) der Ordnungen $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ stellen die Vektoren $\mathfrak{A}_\nu$ der abzählbar unendlich vielen und paarweise orthogonalen Koordinatenebenen Π_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ aus $\mathfrak{H}$ dar, in welchen die Vektoren $\mathfrak{A}_\nu$ durch ihre rechtwinkeligen Koordinaten a_ν', a_ν'' bestimmt sind. Im folgenden wird jedoch die Festlegung dieser Vektoren durch die Paare konjugiert komplexer Koordinaten α_ν, $\alpha_{-\nu} = \bar{\alpha}_\nu$, $|\nu| = 1, 2, 3, \ldots$ bevorzugt, weshalb jede der Koordinatenebenen Π_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ als von zwei durch das Konjugium verknüpften komplexen Zahlenebenen überdeckt anzusehen ist. Die Koordinatenachsen Π_ν' ($a_\nu'' = 0$) und Π_ν'' ($a_\nu' = 0$) der Ebenen Π_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ werden im folgenden auch als die reellen bzw. imaginären Koordinatenachsen dieser Ebenen bezeichnet. Das System der Koordinatenebenen Π_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ ist dann noch durch die dazu normale Koordinatenachse Π_0 zu ergänzen, deren Vektoren den konstanten Funktionen entsprechen.

Die nullte Komponente A_0 eines Bereiches A aus H stellt in Π einen Kreis um den Koordinatenursprung 0 mit dem Radius $a_0/2$ dar, während die erste Komponente A_1 einen Punkt bestimmt, der bei

konvexen Bereichen als *Steiner*scher Krümmungsschwerpunkt bezeichnet wird; er ist unter den Punkten der Ebene Π dadurch gekennzeichnet, daß für ihn der Abstand $r(A) = |A - A_1|$ vom Bereich A ein Minimum wird. Es erscheint daher als gerechtfertigt, den Punkt A_1 als die Bereichsmitte und die reelle Zahl $r(A)$ als den Bereichsradius zu bezeichnen. Der Bereichsradius $r(A)$ stimmt dann mit dem absoluten Betrag der zur Koordinatenebene Π_1 normalen Komponente $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1$ des Vektors $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{H}$ überein; die Richtung dieser Normalkomponente in $\mathfrak{H}$ wird jedoch erst durch die Abhängigkeit des Abstandes der Tangentialspeere des Bereiches A von seiner Mitte A_1 bestimmt. Die Summe $A^{(1)} = A_0 + A_1$ stellt sodann den bestapproximierenden Kreis des Bereiches A dar. Die höheren Komponenten A_ν ($\nu > 1$) des Bereiches A sind stützbare, jedoch nicht konvexe Bereiche, die von gemeinen Hypozykloiden begrenzt werden. Stützbare Bereiche, deren Stützfunktionen trigonometrische Polynome sind, werden als Polynombereiche bezeichnet. Die Partialsummen (4) der Fourierreihe (2) der Stützfunktion $a(\varphi)$ eines Bereiches A bestimmen daher dessen bestapproximierende Polynombereiche $A^{(n)}$; sie sind die Bilder der Orthogonalprojektionen $\mathfrak{A}^{(n)}$ des Vektors $\mathfrak{A}$ auf die Koordinatenräume $\mathfrak{R}_{2n+1}$, die von den Mannigfaltigkeiten $\Pi_\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ aufgespannt werden.

3. Spezielle Bereiche.

Spezielle Eigenschaften der Funktionen $a(\varphi)$ aus L^2 bewirken in $\mathfrak{H}$ spezielle Lagen der Vektoren $\mathfrak{A}$ zum Koordinatensystem, während in der Ebene Π die entsprechenden Bereiche A aus H gleichfalls durch besondere Eigenschaften gekennzeichnet sind. Die Funktionen $a(\varphi)$ und $\bar{a}(\varphi) = a(-\varphi)$ aus L^2 besitzen konjugiert komplexe Koordinaten; sie werden daher ebenso wie ihre Bildvektoren $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{H}$ und ihre Bildbereiche A und $\overline{A}$ der Ebene Π als adjungiert bezeichnet. Adjungierte Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ aus $\mathfrak{H}$ entsprechen sich in der Spiegelung an jenem Unterraum $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{H}$ der von Π_0 und den reellen Koordinatenachsen Π_ν', $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ aufgespannt wird. Seine Vektoren besitzen reelle Koordinaten und werden demnach als selbstadjungiert bezeichnet; sie entsprechen den geraden Funktionen aus L^2. Die ungeraden Funktionen aus L^2 werden auf den zu $\mathfrak{S}'$ normalen Unterraum $\mathfrak{S}''$ von $\mathfrak{H}$ abgebildet, der von den imaginären Koordinatenachsen Π_ν'', $\nu = 1, 2, 3,$ aufgespannt wird und daher die Vektoren mit rein imaginären Koordinaten umfaßt. Die beiden Vektorräume $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ sind zueinander orthogonal und spannen zusammen den ganzen *Hilbert*schen Raum

$\mathfrak{H} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$ auf. Der Zerlegung einer Funktion $a(\varphi)$ aus L^2 in ihren geraden und ungeraden Bestandteil entspricht somit in $\mathfrak{H}$ die Darstellung eines Vektors $\mathfrak{A}$ als Summe $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \bar{\mathfrak{A}}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \bar{\mathfrak{A}})$ je eines Vektors $\frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \bar{\mathfrak{A}})$ aus $\mathfrak{S}'$ und eines Vektors $\frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \bar{\mathfrak{A}})$ aus $\mathfrak{S}''$.

Adjungierte stützbare Bereiche A und $\bar{A}$ der Ebene Π entsprechen sich in der mit der Umorientierung verknüpften Spiegelung an der Polarachse dieser Ebene; selbstadjungierte Bereiche, also solche mit geraden Stützfunktionen werden durch diese Transformation in sich übergeführt; Bereiche mit ungeraden Stützfunktionen gestatten dagegen die Spiegelung an der zur Polarachse normalen Geraden durch den Koordinatenursprung 0. Jeder Bereich A aus H kann sodann als die Summe $A = \frac{1}{2}(A + \bar{A}) + \frac{1}{2}(A - \bar{A})$ aus seinem geraden und seinem ungeraden Bestandteil dargestellt werden.

Durch die Umorientierung eines Bereiches A mit der Stützfunktion $a(\varphi)$ entsteht der Bereich A^* mit der Stützfunktion $a^*(\varphi) = -a(\varphi + \pi)$, für dessen Koordinaten sodann $\alpha_\nu^* = -\alpha_\nu e^{i\nu\pi}$ gilt. Daraus folgt aber, daß Bereiche, welche lediglich Komponenten aus ungeraden Klassen $\nu = 1, 3, 5, \ldots$ enthalten, durch die Umorientierung in sich übergeführt werden; in Verallgemeinerung einer Namensgebung von *H. Brunn* werden diese als Buschenveloppenbereiche[4] bezeichnet. Sind nur gerade Klassen $\nu = 0, 2, 4, \ldots$ am Aufbau eines Bereiches beteiligt, dann besitzt dieser den Koordinatenursprung 0 als Mittelpunkt. Jeder Bereich A aus H kann somit als die Summe $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$ aus einem Mittelpunktbereich $\frac{1}{2}(A + A^*)$ und einem Buschenveloppenbereich $\frac{1}{2}(A - A^*)$ dargestellt werden. Die Mittelpunktsbereiche und die Buschenveloppenbereiche bestimmen im *Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$ die beiden zueinander orthogonalen Unterräume $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$, die von den Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν mit geradem, bzw. ungeradem Index aufgespannt werden. Die beiden Räume $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ spannen zusammen $\mathfrak{H}$ auf, so daß also jeder Vektor $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{H}$ als die Summe $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*) + \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^*)$ je eines Vektors aus $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ dargestellt wird. Der Umorientierung der stützbaren Bereiche aus H entspricht dann in $\mathfrak{H}$ die Spiegelung der Vektoren am Vektorraum $\mathfrak{P}''$.

Der zu einem Bereich A mit der Stützfunktion $a(\varphi)$ entgegengesetzte Bereich $-A$ besitzt die Stützfunktion $-a(\varphi)$; er ergibt sich aus A durch die mit einer Umorientierung verknüpften Drehung um

[4] Vgl. *J. v. Sz. Nagy* [8].

den Ursprung 0 durch den Winkel π. In $\mathfrak{H}$ entspricht diesem Vorgang die Spiegelung des Vektors $\mathfrak{A}$ am Koordinatenursprung $\mathfrak{O}$.

4. Harmonische Drehungen.

Wird ein Bereich A aus H mit der Stützfunktion $a(\varphi)$ in der Ebene Π um den Ursprung 0 durch den Winkel λ gedreht, dann ist $a(\varphi - \lambda)$ die Stützfunktion dieser Drehungslage, die symbolisch mit AE^{λ} bezeichnet wird. Der Bereich AE^{λ} besitzt dann die Koordinaten $\alpha_\nu e^{-i\nu\lambda}$, woraus man entnimmt, daß die entsprechende Transformation $\mathfrak{E}^{\lambda}$ im *Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$ eine sehr spezielle Drehung des Vektors $\mathfrak{A}$ um die Koordinatenachse Π_0 darstellt. Dabei bleibt die nullte Komponente $\mathfrak{A}_0$ dieses Vektors ungeändert, während die in den Koordinatenebenen Π_ν $(\nu \geqq 1)$ liegenden Komponenten in diesen Ebenen die Drehungen $\mathfrak{E}_\nu^{\lambda}$ um den Ursprung $\mathfrak{O}$ durch die Drehwinkel $\nu\lambda$ erfahren. Der gedrehte Vektor $\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}^{\lambda}$ ergibt sich sodann durch die Zusammensetzung der Drehungslagen $\mathfrak{A}_\nu\,\mathfrak{E}_\nu^{\lambda}$ der Komponenten $\mathfrak{A}_\nu$ des Vektors $\mathfrak{A}$. Die Drehung $\mathfrak{E}^{\lambda}$ in $\mathfrak{H}$ kann daher auch symbolisch als die Summe

$$\mathfrak{E}^{\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{E}_\nu^{\lambda}$$

aus den Drehungen $\mathfrak{E}_\nu^{\lambda}$ in den Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν dargestellt werden. In Ermangelung einer besseren Bezeichnung soll diese im folgenden oftmals benötigte spezielle Bewegung eines Vektors als die zum Parameter λ gehörige *harmonische Drehung um die Koordinatenachse* Π_0 bezeichnet werden. Die harmonischen Drehungen um die Koordinatenachse Π_0 bilden eine zyklische Gruppe, mit der Identität $\mathfrak{E}^0$ als Einheitselement. Variiert der Parameter λ von 0 bis 2π, dann beschreibt der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}^{\lambda}$ die Bahnkurve der harmonischen Drehungsgruppe. Die differentialgeometrischen Eigenschaften dieser Kurve gestatten dann eine eindrucksvolle geometrische Versinnlichung der auf die Funktion $a(\varphi)$ anzuwendenden Differentialoperatoren[5]. Die Bahnkurve besitzt in jedem ihrer Punkte einen Tangentenvektor $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{E}^{\lambda}$, wenn von der Stützfunktion $a(\varphi)$ die Ableitung $a'(\varphi)$ existiert und diese zu L^2 gehört. Für den zwischen zwei Drehungslagen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}^{\lambda_1}$ und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}^{\lambda_2}$ liegenden Bogen der Bahnkurve gilt dann $|\mathfrak{A}'|\,(\lambda_2 - \lambda_1)$

[5] Hierüber habe ich in einem am 2. 5. 1950 an der Universität in Ferrara gehaltenen Vortrag berichtet. Eine Wiedergabe desselben soll demnächst erscheinen.

5. Faltungsrelation.

Durch

$$y(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(\varphi - \lambda)\, x(\lambda)\, d\lambda \tag{6}$$

wird eine multiplikative Verknüpfung der Funktionen aus L^2 definiert, die als *Faltung* bezeichnet wird; sie genügt offensichtlich dem kommutativen und dem assoziativen, sowie bezüglich der Addition auch dem distributiven Gesetz. Durch die Einführung dieser multiplikativen Verknüpfung wird somit der Funktionenraum L^2 zu einem *Funktionenring*. Die entsprechenden Verknüpfungen

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{X},\ Y = T\,X \tag{7}$$

der Vektoren des *Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$ und der stützbaren Bereiche der Menge H der Ebene Π werden gleichfalls als Faltungen bezeichnet. Durch ihre Einführung wird die Menge H zum *Stützbereichring*[6] und der *Hilbert*sche Raum $\mathfrak{H}$ zum Träger eines *Systems höherer komplexer Zahlen*.

Wegen der Orthogonalität der Winkelfunktionen ergibt sich $y(\varphi)$ gliedweise durch die Faltung gleichnamiger Komponenten von $t(\varphi)$ und $x(\varphi)$, für deren Koordinaten sodann

$$\eta_\nu = \tau_\nu\, \xi_\nu \quad |\nu| = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

gilt. Jede Klasse der Komponenten stellt sodann einen Unterring von L^2 dar, der für $\nu \geqq 1$ zum Körper der komplexen und für $\nu = 0$ zum Körper der reellen Zahlen isomorph ist. Die geometrische Deutung der Faltung zweier Vektoren $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ ergibt dann in jeder der Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν eine Drehstreckung der Komponenten $\mathfrak{X}_\nu$ um den Koordinatenursprung $\mathfrak{O}$ mit den Drehwinkeln $-\arg(\tau_\nu)$ und den Streckungsverhältnissen $|\tau_\nu|$. In der Ebene Π erfahren die Komponenten X_ν des Bereiches X gleichfalls Drehstreckungen um 0 mit den Streckungsverhältnissen $|\tau_\nu|$, doch sind die Drehwinkel hier $-\frac{1}{\nu}\arg(\tau_\nu)$.

Für den absoluten Betrag eines Faltungsproduktes (7) folgt aus (8)

$$|\mathfrak{Y}|^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \tau_\nu\, \tau_{-\nu}\, \xi_\nu\, \xi_{-\nu} \tag{9}$$

woraus sich für $\tau = \mathrm{Max}\,|\tau_\nu|$ und $\xi = \mathrm{Max}\,|\xi_\nu|$

[6] Vgl. *H. Görtler* [3].

$$|\mathfrak{Y}| \leqq \tau |\mathfrak{X}|, \quad |\mathfrak{Y}| \leqq \xi |\mathfrak{T}| \tag{10}$$

ergibt.

Aus (9) folgt, daß das Faltungsprodukt $\mathfrak{Y}$ (7) zweier Vektoren $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ dann und nur dann mit dem Nullvektor $\mathfrak{O}$ übereinstimmt, wenn entweder einer der beiden Faktoren selbst mit $\mathfrak{O}$ übereinstimmt oder $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{X}$ *komplementäre Nullteiler* sind. Im letzteren Falle sind an der Komponentenzerlegung von $\mathfrak{T}$ nur jene Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν beteiligt, die nicht in der Komponentenzerlegung von $\mathfrak{X}$ auftreten und umgekehrt. Jeder Nullteiler ist zumindestens einer der Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν normal; insbesondere sind komplementäre Nullteiler zueinander normal. Die den Unterräumen $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ von $\mathfrak{H}$ angehörenden Bildvektoren der Mittelpunktsbereiche und der Buschenveloppenbereiche der Ebene Π erweisen sich paarweise als komplementäre Nullteiler. Das Faltungsprodukt zweier Vektoren aus $\mathfrak{P}'$ bzw. $\mathfrak{P}''$ gehört dann gleichfalls diesen Unterräumen an.

Werden sämtliche Vektoren aus $\mathfrak{H}$ mit einem festen Vektor $\mathfrak{T}$ gefaltet, dann ergibt sich der Unterraum $\{\mathfrak{T}\}$ von $\mathfrak{H}$, der als das Faltungsideal des Vektors $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird. $\{\mathfrak{T}\}$ enthält den Vektor $\mathfrak{T}$ selbst nicht, da in $\mathfrak{H}$ kein Einheitselement der Faltung vorhanden ist. In jeder der Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ sind jedoch die Vektoren $\mathfrak{E}_\nu^0$ ($\tau_\mu = 1, |\mu| = \nu$; $\tau_\mu = 0, |\mu| \neq \nu$) die Einheitselemente der Faltung. Da diese zu allen anderen Koordinatenmannigfaltigkeiten orthogonal sind, bewirkt die Faltung mit diesen Einheitselementen die Orthogonalprojektionen

$$\mathfrak{X}_\nu = \mathfrak{E}_\nu^0 \mathfrak{X} \tag{11}$$

des Vektors $\mathfrak{X}$ auf die Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν. Es erweist sich gelegentlich als zweckmäßig, für die Faltung in $\mathfrak{H}$ ein akzessorisches Einheitselement $\mathfrak{E}^0$ ($\tau_\nu = 1, |\nu| = 0, 1, 2, \ldots$) einzuführen, das dann als die symbolische Summe

$$\mathfrak{E}^0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{E}_\nu^0$$

der Einheitselemente $\mathfrak{E}_\nu^0$ der Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν betrachtet werden muß. Die Faltung eines Vektors $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{E}^0$ bestimmt dann durch (11) seine Komponentenzerlegung

$$\mathfrak{X} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{X}_\nu.$$

Die Faltung der Vektoren aus $\mathfrak{H}$ mit einem festen Vektor $\mathfrak{T}$ bestimmt in $\mathfrak{H}$ eine spezielle lineare Transformation, die wegen (10) als beschränkt bezeichnet wird; τ wird dann die Norm der Transformation $\mathfrak{T}$ genannt. Die Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ sind gegenüber $\mathfrak{T}$ invariant, doch sind Eigenvektoren nur in Π_0 und in jenen Koordinatenebenen Π_ν ($\nu > 0$) vorhanden, in denen der Vektor $\mathfrak{T}$ selbstadjungierte Komponenten $\mathfrak{T}_\nu = \overline{\mathfrak{T}}_\nu$ besitzt. Ist der Vektor $\mathfrak{T}$ selbstadjungiert, dann wird auch die Transformation $\mathfrak{T}$ als selbstadjungiert bezeichnet. Der Unterraum $\mathfrak{S}'$ der selbstadjungierten Vektoren aus $\mathfrak{H}$ ist dann gegenüber jeder selbstadjungierten Transformation invariant.

Wird der Vektor $\mathfrak{T}$ einer harmonischen Drehung um die Koordinatenachse Π_0 durch den Winkel λ unterworfen, dann ergibt sich der Vektor $\mathfrak{T}\,\mathfrak{E}^\lambda$ mit den Koordinaten $\tau_\nu\, e^{-i\nu\lambda}$. Das Faltungsprodukt $\mathfrak{Y} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{X}$ erweist sich daher als die kontinuierliche Linearkombination aus den harmonischen Drehungslagen $\mathfrak{T}\,\mathfrak{E}^\lambda$ von $\mathfrak{T}$ mit $x(\lambda)$ als Belegungsfunktion; andererseits bestimmt die zu dem Faltungsprodukt $\mathfrak{Y}$ gehörige Funktion $y(\varphi)$ aus L^2 für jeden Wert von φ das innere Produkt des Vektors mit $\mathfrak{X}$ den harmonischen Drehungslagen $\overline{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{E}^\varphi$ des zu $\mathfrak{T}$ adjungierten Vektors $\overline{\mathfrak{T}}$.

6. Abbildungsmittel.

In Nr. 8 sollen für die Faltungsrelationen (7) sowohl im *Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$ als auch in der Menge H der stützbaren Bereiche der Ebene Π geometrische Deutungen angegeben werden. Hierfür erweist es sich als zweckmäßig, vorerst eine Abbildung $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ einzuführen, die eine Verallgemeinerung der Abbildung Σ darstellt. Die Abbildung $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ kommt dadurch zustande,

$$Y = \Sigma(\mathfrak{T}\,\mathfrak{X}) = \Sigma_{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{X}, \tag{12}$$

daß jeder Vektor $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ zunächst mit einem festen Vektor $\mathfrak{T}$ gefaltet, und der Produktvektor $\mathfrak{Y} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{X}$ sodann vermöge der Abbildung Σ auf den Bereich Y des Faltungsideals $\{T\}$ der Ebene Π abgebildet wird. Die Zuordnung zwischen den Vektoren $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ und den Bereichen Y des Faltungsideals $\{T\}$ der Ebene Π kann jedoch auch unmittelbar hergestellt werden, sofern in $\mathfrak{H}$ ein geeignetes Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ zur Verwendung gelangt, das aus einer einparametrigen Schar von Büscheln paralleler Hyperebenen besteht.

Sind $x(\varphi)$, $t(\varphi)$, $y(\varphi)$, die den Vektoren $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Y}$ bzw. den Bereichen X, T, Y entsprechenden Funktionen aus L^2, dann sind durch

$$y(\varphi_0) = h_0$$

alle Bereiche Y des Faltungsideals $\{T\}$ bestimmt, die den Speer $g(\varphi_0, h_0)$ mit den Koordinaten φ_0, h_0 berühren. Für die Punkte $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ die vermöge $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ auf die Bereiche Y abgebildet werden, bzw. für die zugehörigen Funktionen $x(\lambda)$ aus L^2 gilt dann die Gleichung

$$h_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t(\varphi_0 - \lambda)\, x(\lambda)\, d\lambda, \tag{13}$$

die offensichtlich eine beschränkte *Hyperebene* $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ in $\mathfrak{H}$ bestimmt, deren Normalenvektor der Funktion $t(\varphi_0 - \lambda)$ aus L^2 entspricht. Der Normalenvektor ergibt sich aus dem Vektor $\mathfrak{T}$ durch den Übergang zum adjungierten Vektor $\overline{\mathfrak{T}}$ und eine auf diesen ausgeübte harmonische Drehung um die Koordinatenachse Π_0 durch den Winkel φ_0. Demgemäß sind seine komplexen Koordinaten $\tau_{-\nu}\, e^{-i\nu\varphi_0}$, was auch unmittelbar aus der Gleichung der Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ abgelesen werden kann, wenn diese in den komplexen Koordinaten der Punkte $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$

$$h_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \tau_\nu\, \xi_\nu\, e^{i\nu\varphi_0}. \tag{14}$$

geschrieben wird. Dem zur Richtung φ_0 gehörigen Parallelspeerbüschel der Ebene Π entspricht somit in $\mathfrak{H}$ das Büschel paralleler Hyperebenen mit dem gemeinsamen Normalenvektor $\overline{\mathfrak{T}}\, \mathfrak{E}^{\varphi_0}$, in welchem die einzelnen Hyperebenen durch ihre Koordinaten h_0 bestimmt werden. Es erscheint daher als gerechtfertigt φ_0 als *Stellungskoordinate* und h_0 als *Abstandskoordinate* der Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ zu bezeichnen. *Die zweiparametrige Mannigfaltigkeit der Hyperebenen* $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ *wird als das Abbildungsmittel* $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ *bezeichnet. Es besteht somit aus einer einparametrigen Schar von Büscheln paralleler Hyperebenen, deren Normalenvektoren* $\overline{\mathfrak{T}}\, \mathfrak{E}^{\varphi_0}$ *die harmonischen Drehungslagen des Vektors* $\overline{\mathfrak{T}}$ *sind.* Diese bilden einen Strahlenhyperkegel $\Omega_{\mathfrak{T}}$, der als der Normalenhyperkegel des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ bezeichnet wird. Es ist unmittelbar evident, daß das Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ die Schiebungen, die harmonischen Drehungen um die Koordinatenachse Π_0 und die Streckungen vom Koordinatenursprung $\mathfrak{O}$ aus gestattet.

Es ist nun zu klären, in welcher Beziehung die Hyperebenen $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ zu den entsprechenden Speeren $g(\varphi_0, h_0)$ der Ebene Π stehen, die im folgenden mit der Koordinatenebene Π_1 identifiziert wird. Je zwei Hyperebenen $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ und

$\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0 + \pi, -h_0)$ schneiden die Bildebene $\Pi = \Pi_1$ nach der gleichen Geraden, für deren Gleichung sich aus (14)

$$\tfrac{1}{2}[\tau_1 \xi_1 e^{i\varphi_0} + \tau_{-1} \xi_{-1} e^{-i\varphi_0}] = h_0$$

ergibt. Wird darin

$$\tau_1 = |\tau_1| e^{-i\omega}, \tau_{-1} = |\tau_1| e^{i\omega}$$

gesetzt, dann folgt daraus die Gleichung

$$x_1' \cos(\varphi_0 - \omega) + x_1'' \sin(\varphi_0 - \omega) = \frac{1}{|\tau_1|} h_0$$

in der x_1', x_1'' die rechtwinkeligen Punktkoordinaten der Ebene Π bedeuten. Diese Zweideutigkeit in der Zuordnung zwischen den Hyperebenen des Abbildungsmittels und ihren Schnittgeraden mit der Ebene Π kann durch die beiden möglichen Orientierungen dieser Geraden beseitigt werden. Es wird daher der Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ der Speer $g^{\times}(\varphi_0 - \omega, \frac{1}{|\tau_1|} h_0)$ und der Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0 + \pi, -h_0)$ der Speer $g^{\times}(\varphi_0 - \omega + \pi, -\frac{1}{|\tau_1|} h_0)$ der gemeinsamen Schnittgeraden mit Π zugeordnet. Aus dem Speer $g^{\times}(\varphi_0 - \omega, \frac{1}{|\tau_1|} h_0)$ ergibt sich sodann der Bildspeer $g(\varphi_0, h_0)$ der Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ vermöge der durch die erste Komponente $\mathfrak{T}_1$ des Vektors $\mathfrak{T}$ bestimmten Drehstreckung um 0 mit $|\tau_1|$ als Streckungsverhältnis und $-\arg(\tau_1)$ als Drehwinkel. *Damit ist nun eine geometrische Deutung für die ausnahmslos eineindeutige Zuordnung zwischen den Hyperebenen $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ und den Speeren $g(\varphi_0, h_0)$ der Ebene Π gefunden.* Die Drehstreckung in der Ebene Π wird zur Identität, wenn die erste Komponente $\mathfrak{T}_1$ des Vektors $\mathfrak{T}$ mit dem Einheitselement $\mathfrak{E}_1^0$ $(\tau_1 = \tau_{-1} = 1)$ der Faltung in $\Pi = \Pi_1$ übereinstimmt.

Die Hyperebenen $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie die Bildebene Π unter konstantem Winkel schneiden. Für den Neigungswinkel ψ der Normalenvektoren $\overline{\mathfrak{T}\,\mathfrak{E}^{\varphi_0}}$ gegen die Bildebene Π, gilt nämlich

$$\cos\psi = \frac{|\mathfrak{T}_1|}{|\mathfrak{T}|}$$

oder

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{|\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_1|}{|\mathfrak{T}_1|},$$

wobei $|\mathfrak{T} - \mathfrak{T}_1|$ die Länge der zu Π normalen Komponente von $\mathfrak{T}$ oder den Radius $r(T)$ des entsprechenden Bildbereiches T in Π bedeutet. Für den Abstand $|\mathfrak{R}|$ des Ursprungs $\mathfrak{O}$ von einer Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ folgt aus

$$|\mathfrak{R}| \cdot |\mathfrak{T}| = h_0.$$

Es sind demnach die Abstände der Hyperebenen $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ vom Koordinatenursprung $\mathfrak{O}$ proportional den Abstandskoordinaten der entsprechenden Speere $g(\varphi_0, h_0)$.

Zwei voneinander linear abhängige Vektoren $\mathfrak{T}$ und $\lambda\mathfrak{T}$ bestimmen zwar das gleiche Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}} \sim \Sigma_{\lambda\mathfrak{T}}$, doch entsprechen sich die einem Speer $g(\varphi_0, h_0)$ zugeordneten Hyperebenen $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ und $\Theta_{\lambda\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ aus $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ bzw. $\Sigma_{\lambda\mathfrak{T}}$ in einer $\frac{1}{\lambda}$-fachen Streckung von $\mathfrak{O}$ aus.

Jede Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ aus $\mathfrak{H}$ schneidet jeden der Koordinatenräume $\mathfrak{R}_{2n+1}(\xi_\nu = 0, |\nu| > n)$ nach einer $2n$-dimensionalen Hyperebene $\Theta^{(n)}_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$, die gleichfalls durch die Gleichungen (13) bzw. (14) bestimmt wird, sofern als Lösungsfunktionen derselben nur trigonometrische Polynome n-ter Ordnung zugelassen werden. Die zu einem Wertepaar φ_0, h_0 gehörigen Hyperebenen aus verschiedenen Koordinatenräumen $\mathfrak{R}_{2n+1}$ und $\mathfrak{H}$ bestimmen sich gegenseitig, da jede Hyperebene $\Theta^{(n)}_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ alle Hyperebenen $\Theta^{(n')}_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ von geringerer Dimension $n' < n$ enthält. *Das Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ aus $\mathfrak{H}$ impliziert somit in jedem der Koordinatenräume $\mathfrak{R}_{2n+1}$ ein Abbildungsmittel $\Sigma^{(n)}_{\mathfrak{T}}$, das gleichfalls aus einer einparametrigen Schar von Büscheln paralleler $2n$-dimensionaler Hyperebenen $\Theta^{(n)}_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, h_0)$ besteht.*

7. Allgemeine Kegelprojektion.

Das Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ gestattet nunmehr eine geometrische Deutung der in Nr. 6 eingeführten Abbildung $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ (12) der Vektoren $\mathfrak{X}$ des *Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$ auf die Bereiche Y des Faltungsideals $\{T\}$ der Ebene Π. Durch den Endpunkt eines Vektors $\mathfrak{X}$ gibt es nun für jeden Wert des Argumentes φ aus dem entsprechende Büschel paralleler Hyperebenen des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ je eine Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi, y(\varphi))$, deren Abstandskoordinate durch das Faltungsprodukt

$y(\varphi)$ von $t(\varphi)$ und bestimmt wird. Die einparametrige Mannigfaltigkeit dieser Hyperebenen stellt dann einen *Hyperkegel* $\varkappa_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{X})$ dar, der als Projektionshyperkegel des Punktes $\mathfrak{X}$ bezeichnet wird. Er ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t(\varphi-\lambda)\, z(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t(\varphi-\lambda)\, x(\lambda)\, d\lambda = y(\varphi)$$

bestimmt, in der die Funktionen $z(\lambda)$ die Punkte der Tangentialhyperebenen darstellen und φ als Parameter zu betrachten ist.

Werden nun die Tangentialhyperebenen $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi, y(\varphi))$ des Projektionskegels $\varkappa_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{X})$ mit der Ebene Π geschnitten, dann ergibt sich zunächst die einparametrige Speermannigfaltigkeit

$$z_1' \cos(\varphi-\omega) + z_1'' \sin(\varphi-\omega) = \frac{1}{|\tau_1|}\, y(\varphi)$$

des stützbaren Bereiches $Y^{\times}$ mit der Stützfunktion $y^{\times}(\varphi) = \frac{1}{|\tau_1|}\, y(\varphi+\omega)$. Die durch die erste Komponente $\mathfrak{T}_1$ des Vektors $\mathfrak{T}$ in $\Pi_1 = \Pi$ bestimmte Drehstreckung führt diesen Bereich sodann in den Bildbereich Y des Vektors $\mathfrak{X}$ über; seine Stützfunktion $y(\varphi)$ ist dann das Faltungsprodukt von $x(\varphi)$ und $t(\varphi)$.

Ist umgekehrt ein Bereich Y des Faltungsideals $\{T\}$ in Π durch seine Stützfunktion $y(\varphi)$ gegeben, dann ergibt sich daraus durch die zu $\mathfrak{T}_1$ inverse Drehstreckung zunächst der Bereich $Y^{\times}$ mit der Stützfunktion $y^{\times}(\varphi) = \frac{1}{|\tau_1|}\, y(\varphi+\omega)$. Durch jeden Tangentialspeer dieses Bereiches gibt es dann eine Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi, y(\varphi))$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{0=-\infty}^{+\infty} \tau_\nu\, \xi_\nu\, e^{i\nu\varphi} = y(\varphi), \tag{15}$$

die zu einer Mantellinie des Normalenhyperkegel $\Omega_{\mathfrak{T}}$ orthogonal ist und damit dem Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ angehört. Die *Euler*schen Formeln

$$\tau_\nu\, \xi_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(\varphi)\, e^{-i\nu\varphi}\, d\varphi$$

gestatten sodann die Berechnung der komplexen Koordinaten ξ_ν, $|\nu| = 0, 1, 2, \ldots$ des gemeinsamen Schnittpunktes $\mathfrak{X}$ der einparametrigen Hyperebenenschar (15). Dabei ist jedoch zu beachten, daß der Raumpunkt $\mathfrak{X}$ dann und nur dann eindeutig bestimmt ist, wenn $\mathfrak{T}$

kein Nullteiler $\tau_\nu \neq 0$, $|\nu| = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Im gegenteiligen Falle bleiben für jene Indizes σ, für die $\tau_\sigma = \tau_{-\sigma} = 0$ gilt, die Koordinaten ξ_σ, $\xi_{-\sigma}$ unbestimmt. Der Vektor $\mathfrak{T}$ ist dann zu den Koordinatenebenen Π_σ normal, was zur Folge hat, daß alle Hyperebenen des Abbildungsmittels $\Sigma_\mathfrak{T}$ zu diesen Koordinatenebenen parallel sind. Die Hyperebenen der einparametrigen Mannigfaltigkeit (15) haben sodann an Stelle eines einzigen Punktes einen linearen Teilraum von $\mathfrak{H}$ gemeinsam, der zu den Koordinatenebenen Π_σ parallel ist.

Damit ist nun für die durch die Korrespondenz (12) *vermittelte Abbildung $\Sigma_\mathfrak{T}$ der Vektoren $\mathfrak{X}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ auf die stützbaren Bereiche Y des Faltungsideals $\{T\}$ der Menge H der Ebene Π eine geometrische Deutung gefunden, die wohl an Einfachheit und Anschaulichkeit nichts zu wünschen übrig läßt. Sie wird im Folgenden als die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_\mathfrak{T}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ bezeichnet.*

Die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_\mathfrak{T}$ des *Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$ impliziert die Abbildungen $\Sigma_\mathfrak{T}^{(n)}$ der Punkte $\mathfrak{X}^{(n)}$ der Koordinatenräume $\mathfrak{R}_{2n+1}$ auf die Polynombereiche $Y^{(n)}$ der Ordnung n der Ebene Π. Die durch einen Punkt $\mathfrak{X}^{(n)}$ gehenden Hyperebenen von $\Sigma_\mathfrak{T}$ schneiden nämlich den Koordinatenraum $\mathfrak{R}_{2n+1}$ nach den gleichfalls durch $\mathfrak{X}^{(n)}$ gehenden $2n$-dimensionalen Hyperebenen des Abbildungsmittels $\Theta_\mathfrak{T}^{(n)}$, die ihrerseits einen $(2n+1)$-dimensionalen Hyperkegel umhüllen. Dieser Hyperkegel schneidet sodann die Bildebene Π nach einem Polynombereich der Ordnung n, der durch die Drehstreckung $\mathfrak{T}_1$ in den Bildbereich $Y^{(n)}$ des Vektors $\mathfrak{X}^{(n)}$ übergeführt wird. Ist der Punkt $\mathfrak{X}^{(n)}$ die Normalprojektion eines Punktes $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ auf den Koordinatenraum $\mathfrak{R}_{2n+1}$, dann erweist sich der Bereich $Y^{(n)}$ als der bestapproximierende Polynombereich n-ter Ordnung des Bildbereiches Y von $\mathfrak{X}$. Für $n = 1$ ergibt sich die Kegelprojektion des dreidimensionalen Raumes, die für $\tau_{-1} = \tau_0 = \tau_1 = 1$ mit der sogenannten zyklographischen Abbildung dieses Raumes übereinstimmt. In dieser Abbildung entspricht dann einem Punkt $\mathfrak{X}^{(1)}$ des $\mathfrak{R}_3$ mit den rechtwinkeligen Koordinaten x_0, x_1', x_1'' in der Ebene Π ein Kreis $Y^{(1)} = X^{(1)}$ mit der Stützfunktion

$$x^{(1)}(\varphi) = \frac{x_0}{2} + x_1' \cos\varphi + x_1'' \sin\varphi.$$

Die Punkte der Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν werden durch die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_\mathfrak{T}$ auf die hypozykloidischen Bereiche der Ebene Π abgebildet, wobei sich die Punkte der Ebenen Π_1 und Π in der durch $\mathfrak{T}_1$ bestimmten Drehstreckung entsprechen.

Die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ ist insofern linear, als jeder Linearkombination von Vektoren aus $\mathfrak{H}$ die gleiche Linearkombination ihrer Bildbereiche in $\{T\}$ entspricht. Insbesondere entspricht der Addition und der Subtraktion der Vektoren aus $\mathfrak{H}$ die Addition und die Subtraktion der entsprechenden Bereiche aus $\{T\}$. Die Multiplikation der Vektoren aus $\mathfrak{H}$ mit einem festen Skalar λ wird dagegen in $\{T\}$ auf eine λ-fache Streckung der Bereiche mit 0 als Streckungszentrum abgebildet. Die lineare Abhängigkeit von Vektoren aus $\mathfrak{H}$ überträgt sich dann in adäquater Weise auf die entsprechenden Bereiche aus $\{T\}$. Einer m-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit aus $\mathfrak{H}$ entspricht daher in $\{T\}$ eine m-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit stützbarer Bereiche. Insbesondere entspricht einer Geraden aus $\mathfrak{H}$ eine einparametrige Linearschar stützbarer Bereiche von $\{T\}$, die dann und nur dann aus ähnlichen und zentrisch ähnlich liegenden Bereichen besteht, wenn die entsprechende Gerade aus $\mathfrak{H}$ die Ebene Π schneidet; in diesem Falle entspricht dann dem Schnittpunkt das gemeinsame Ähnlichkeitszentrum der Bereiche der Linearschar. Gehen durch eine Gerade aus $\mathfrak{H}$ Hyperebenen des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$, dann gehören diese den Projektionshyperkegeln aller Punkte dieser Geraden an. Ihre Bildspeere in Π sind dann gemeinsame Tangentialspeere aller Bereiche der entsprechenden Linearschar. *Es ergibt sich somit die Möglichkeit, die Richtungen der Geraden im Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ hinsichtlich ihrer Lage zum Normalhyperkegel $\Omega_{\mathfrak{T}}$ in ähnlicher Weise zu klassifizieren, wie dies im dreidimensionalen Raum durch den Normalenkegel des Abbildungsmittels der zyklographischen Abbildung tatsächlich geschieht*[7].

Das Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ gestattet alle Schiebungen aus $\mathfrak{H}$, weshalb die Projektionshyperkegel aller Punkte untereinander kongruent sind. *Die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ kann daher auch in der Weise erklärt werden, daß zunächst der Projektionshyperkegel $\varkappa_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{X})$ des Punktes $\mathfrak{X}$ etwa aus dem Projektionshyperkegel $\varkappa_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{O})$ des Koordinatenursprungs $\mathfrak{O}$ durch die zu dem Vektor $\mathfrak{X}$ gehörige Schiebung erhalten wird. In dieser Lage schneidet der Hyperkegel sodann die Ebene Π nach dem stützbaren Bereich $Y^{\times}$, der durch die Drehstreckung $\mathfrak{T}_1$ in den Bildbereich Y übergeführt wird.*

Die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ ist vollständig bestimmt, sobald einem Vektor $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$, der nicht Nullteiler ist, ein Bildbereich Y aus dem

[7] Hierüber soll zu einem späteren Zeitpunkt im Zusammenhang mit der durch das Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ definierten Ordnungsrelation berichtet werden.

Faltungsideal $\{X\}$ der Menge H der Ebene Π zugeordnet wird. Nach Nr. 6 bestimmt dann der Vektor $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{H}$ ein Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ und damit auch die zugehörige allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{X}}$. Da der Bereich Y dem Faltungsideal $\{X\}$ angehört, gibt es einen Vektor $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{H}$, dem der Bereich Y in der allgemeinen Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ entspricht. Der Vektor $\mathfrak{T}$ ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn Y nicht Nullteiler ist. Nach Nr. 6 bestimmt er das Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ der allgemeinen Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{X}}$, die den Vektor $\mathfrak{X}$ auf den Bereich Y abbildet.

Die Tatsache, daß durch den Vektor $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ und durch seinen Bildbereich Y aus $\{X\}$ die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ vollständig bestimmt ist, scheint im Widerspruch zur Raumanschauung zu stehen. Zunächst bestimmt zwar die erste Komponente $\mathfrak{X}_1 = Y_1^{\times}$ von $\mathfrak{X}$ die Drehstreckung $\mathfrak{T}_1$, durch die sie in den Ortsvektor der Bereichsmitte Y_1 von Y übergeführt wird. Durch die dazu inverse Drehstreckung ergibt sich sodann aus dem Bereich Y der Bereich $Y^{\times}$ dessen Tangentialspeere nun mit dem Endpunkt des Vektors $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ durch zweidimensionale Ebenen verbunden werden können. Es ist nun zunächst nicht zu überblicken, in welcher Weise durch diese einparametrige Schar zweidimensionaler Ebenen das Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ bestimmt sein soll, das ja bekanntlich aus einer einparametrigen Schar von Büscheln paralleler Hyperebenen besteht. Es darf dabei allerdings nicht übersehen werden, daß das Abbildungsmittel $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ die harmonischen Drehungen um die Koordinatenachse Π_0 und die Streckungen vom Koordinatenursprung $\mathfrak{O}$ aus gestattet. Werden die Tangentialspeere des Bereiches Y jenen Drehstreckungen

$$\frac{y(\varphi_0)}{y(\varphi)} \cdot e^{i(\varphi_0 - \varphi)}$$

unterworfen, die sie mit einem festgehaltenen Tangentialspeer $g(\varphi_0, y(\varphi_0))$ dieses Bereiches zur Deckung bringen, dann erfährt hierbei der Punkt $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ die entsprechenden harmonischen Drehstreckungen

$$\xi_\nu \to \zeta_\nu = \xi_\nu \frac{y(\varphi_0)}{y(\varphi)} e^{-i\nu(\varphi_0 - \varphi)}. \tag{16}$$

Die zweidimensionalen Verbindungsebenen dieser Punkte mit dem Tangentialspeer $g^{\times}(\varphi_0 - \omega, \frac{1}{|\tau_1|} y(\varphi_0))$ des Bereiches $Y^{\times}$ müssen in der Hyperebene $\Theta_{\mathfrak{T}}(\varphi_0, y(\varphi_0))$ des Abbildungsmittels $\Sigma_{\mathfrak{T}}$ angehören. Aus dem allgemeinen Ansatz

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\sigma_\nu\,\zeta_\nu\,e^{i\nu\varphi_0}=y(\varphi_0),\ \sigma_1=\tau_1,\sigma_{-1}=\tau_{-1}$$

für die Gleichung einer Hyperebenen aus $\mathfrak{H}$, die den Speer $g^\times(\varphi_0-\omega,\frac{1}{|\tau_1|}\,y(\varphi_0))$ enthält, folgt nun durch die Forderung der Inzidenz mit den Punkten (16), die für jedes Argument $0\leqq\varphi<2\pi$ gültige Beziehung

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\sigma_\nu\,\xi_\nu\,e^{i\nu\varphi}=y(\varphi),$$

aus der sich wegen (15) sodann $\sigma_\nu=\tau_\nu$, $|\nu|=0,1,2,\ldots$ ergibt. Durch den Vektor $\mathfrak{X}$ und seinem Bildbereich Y aus dem Faltungsideal $\{X\}$ wird somit tatsächlich der Vektor $\mathfrak{T}$ und damit das Abbildungsmittel $\Sigma_\mathfrak{T}$ bestimmt, wodurch der eingangs erwähnte scheinbare Widerspruch zur Raumanschauung aufgeklärt ist. Ist jedoch $\mathfrak{X}$ und damit auch Y ein Nullteiler, dann bleiben vom Vektor $\mathfrak{T}$ die Komponenten in den zum Vektor $\mathfrak{X}$ normalen Koordinatenmannigfaltigkeiten Π_ν unbestimmt. Insbesondere wird durch einen Vektor $\mathfrak{X}^{(n)}$ des Koordinatenraumes $\mathfrak{R}_{2\,n+1}$ und einem Polynombereich $Y^{(n)}$ der Ordnung n der Ebene Π nur das Abbildungsmittel $\Sigma_\mathfrak{T}$ der allgemeinen Kegelprojektion dieses Raumes bestimmt.

8. Geometrische Deutung der Faltungsrelation.

Die in der Einleitung erwähnte und durch die Korrespondenz

$$X=\Sigma\mathfrak{X} \tag{17}$$

definierte spezielle Kegelprojektion Σ des *Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$ kann nicht unmittelbar als Sonderfall der allgemeinen Kegelprojektion $\Sigma_\mathfrak{T}$ (12) gewonnen werden, da die Faltung bekanntlich kein Einheitselement besitzt. Es verursacht jedoch keine besonderen Schwierigkeiten, auch für die spezielle Kegelprojektion Σ ein Abbildungsmittel Σ zu definieren, das ebenfalls aus einer einparametrigen Schar von Hyperebenen $\Theta(\varphi_0,h_0)$ besteht, doch zeigt sich hierbei, daß diese Hyperebenen nicht beschränkt sind. Die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten behindern jedoch die geometrische Deutung der Zuordnung (17) in keiner Weise. Der Projektionsvorgang der speziellen Kegelprojektion Σ ist somit im wesentlichen dem der allgemeinen Kegelprojektion $\Sigma_\mathfrak{T}$ völlig analog; hinsichtlich der Einzelheiten muß jedoch auf die Note [7] verwiesen werden.

Die beiden Kegelprojektionen $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ und Σ können nun zur geometrischen Deutung der Faltungsrelation (7) im *Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$ herangezogen werden. Jeder Vektor $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ wird zunächst durch die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ auf den Bereich $Y = \Sigma_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{X}$ der Ebene Π abgebildet, der andererseits wegen $Y = \Sigma\,\mathfrak{Y}$ dem Vektor $\mathfrak{Y}$ aus $\mathfrak{H}$ in der speziellen Kegelprojektion Σ entspricht. *Die lineare Transformation* $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{H}$ *wird somit*

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{X} = \Sigma^{-1}\,\Sigma_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{X}$$

als die Zusammensetzung der beiden Abbildungen Σ^{-1} *und* $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ *erklärt. Die Vektoren* $\mathfrak{X}$ *und* $\mathfrak{Y}$ *aus* $\mathfrak{H}$ *sind also dadurch als entsprechende Vektoren der Transformation* $\mathfrak{T}$ *gekennzeichnet, daß sie durch die Kegelprojektionen* $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ *und* Σ *auf den gleichen Bildbereich* Y *der Ebene* Π *abgebildet werden.*

Besonders einfach werden die Verhältnisse dann, wenn die erste Komponente $\mathfrak{T}_1$ des Vektors $\mathfrak{T}$ mit dem Einheitselement $\mathfrak{E}_1^0$ der Faltung in $\Pi = \Pi_1$ übereinstimmt. In diesem Falle bleibt bei der Transformation $\mathfrak{T}$ die Ebene $\Pi = \Pi_1$ punktweise fest, was zur Folge hat, daß die Projektionskegel $\varkappa_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X})$ und $\varkappa(\mathfrak{Y})$ der entsprechenden Vektoren $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ die Ebene Π nach dem gemeinsamen Bildbereich Y schneiden, dessen Mitte sodann der gemeinsame Fußpunkt der von den Punkten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf Π gefällten Lote ist.

Die Transformation $\mathfrak{T}$ ist durch die Angabe irgend eines Paares $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ entsprechender Vektoren vollständig bestimmt, wobei natürlich der Vektor $\mathfrak{Y}$ dem Faltungsideal $\{\mathfrak{X}\}$ des Vektors $\mathfrak{X}$ entnommen werden muß und der Vektor $\mathfrak{X}$ überdies kein Nullteiler sein darf. Zur Bestimmung des Vektors $\mathfrak{T}$ wird der Vektor $\mathfrak{Y}$ durch die spezielle Kegelprojektion Σ zunächst auf den Bereich Y der Ebene Π abgebildet, der sich sodann vermöge der allgemeinen Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ als der Bildbereich des Vektors $\mathfrak{T}$ erweist.

In völlig analoger Weise ergibt sich nun mittels der Abbildungen $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ und Σ eine geometrische Deutung der Faltungsrelation (7) in der Menge H der stützbaren Bereiche der Ebene Π. Jeder Bereich X aus H erweist sich zunächst vermöge der speziellen Kegelprojektion Σ als der Bildbereich $X = \Sigma\,\mathfrak{X}$ eines Vektors $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$, der andererseits durch die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ auf den Bereich $Y = \Sigma_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{X}$ der Ebene Π abgebildet wird. *Die lineare Transformation* T *in* H

$$Y = T\,X = \Sigma_{\mathfrak{X}}\,\Sigma^{-1}\,X$$

stellt sich somit als die Zusammensetzung der beiden Abbildungen $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ *und* Σ^{-1} *dar. Die Bereiche* X *und* Y *aus* H *sind somit dadurch als entsprechende*

Bereiche der Transformation T gekennzeichnet, daß sie vermöge der Kegelprojektionen Σ und $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ dem gleichen Vektor $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ entsprechen.

Die Transformation T ist wieder vollständig dadurch bestimmt, daß zu irgend einem Bereich X aus H der entsprechende Bereich Y aus dem Faltungsideal $\{X\}$ von X angegeben wird, wobei jedoch X kein Nullteiler sein darf. Der Bereich X entspricht nun vermöge der speziellen Kegelprojektion Σ dem Vektor $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$, der die allgemeine Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ bestimmt. In dieser Abbildung entspricht sodann der Bereich Y dem Vektor $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{H}$, der nunmehr durch die spezielle Kegelprojektion Σ auf den gesuchten Bereich T aus H abgebildet wird.

Die beiden Kegelprojektionen Σ und $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ haben sich damit als ein wertvolles Hilfsmittel zur geometrischen Deutung der Faltungsrelationen (7) im *Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$ und in der Menge H der stützbaren Bereiche der Ebene Π erwiesen. Wie schon erwähnt wurde, läßt sich jedoch die spezielle Kegelprojektion Σ nicht unmittelbar als Sonderfall der allgemeinen Kegelprojektion $\Sigma_{\mathfrak{X}}$ auffassen. Beide Abbildungen erweisen sich jedoch als Sonderfälle eines umfassenderen Typus von Kegelprojektionen, dem eine Verallgemeinerung der Faltungsrelationen (7) zugrunde liegt. Wird nämlich in (7) an die Stelle des Vektors $\mathfrak{T}$ eine nicht notwendig konvergente Folge von Vektoren $\mathfrak{T}^{(j)}$ gesetzt, die jedoch so beschaffen ist, daß die Folge der Faltungsprodukte für jeden Vektor $\mathfrak{X}$ konvergiert

$$\mathfrak{Y} = \lim_{j\to\infty} \mathfrak{Y}^{(j)} = \lim_{j\to\infty} \mathfrak{T}^{(j)}\,\mathfrak{X},$$

dann wird dadurch in $\mathfrak{H}$ eine beschränkte lineare Transformation $\mathfrak{T}$ vom Faltungstypus bestimmt. Die Zusammensetzung dieser Transformation mit der speziellen Kegelprojektion Σ liefert sodann eine Abbildung

$$Y = \lim_{j\to\infty} Y^{(j)} = \lim_{j\to\infty} (\Sigma\,\mathfrak{T}^{(j)}\,\mathfrak{X}) = \Sigma_{\mathfrak{T}}\,\mathfrak{X}$$

der Vektoren $\mathfrak{X}$ aus $\mathfrak{H}$ auf die stützbaren Bereiche Y der Menge H der Ebene Π, die ebenfalls wieder unmittelbar als eine Kegelprojektion erklärt werden kann. Die Abbildungen von diesem Typus umfassen sodann die hier diskutierte allgemeine Kegelprojektion und die spezielle Kegelprojektion als Sonderfälle; sie erweisen sich als geeignete Hilfsmittel zur *geometrischen Deutung der beschränkten linearen Transformationen vom Faltungstypus im Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ und in der Menge H der stützbaren Bereiche der Ebene Π*, worüber bei einer späteren Gelegenheit ausführlich berichtet werden soll.

Literatur.

[1] *Brunn, H.*, Über Curven ohne Wendepunkte, München 1889.

[2] *Geppert, H.*, Über den Brunn-Minkowskischen Satz, Math. Zeitschr. 42 (1937), p. 313—321.

[3] *Görtler, H.*, Erzeugung stützbarer Bereiche I, Deutsche Mathematik 2 (1937), p. 454—466.

[4] *Görtler, H.*, Erzeugung stützbarer Bereiche II, Deutsche Mathematik 3 (1938), p. 189—202.

[5] *Inzinger, R.*, Über eine lineare Transformation in den Mengen der konvexen und der stützbaren Bereiche einer Ebene, Monatsh. f. Math. 53 (1949), p. 227—250.

[6] *Inzinger, R.*, Stützbare Bereiche, trigonometrische Polynome und Defizite höherer Ordnung, Monatsh. f. Math. 53 (1949), p. 302—323.

[7] *Inzinger, R.*, Eine geometrische Realisierung des Hilbertschen Raumes in der Menge der stützbaren Bereiche einer Ebene, Rend. di Mat. e. d. s. app. ser. V, Vol. X, (1951), fasc. 1—2.

[8] *Sz. Nagy, J. v.*, Über die Buschenveloppen von H. Brunn, Math. Zeitschr. 41 (1936), p. 479—492.

Zur Theorie der hypergeometrischen Funktionen.

Von

E. Höfinger, Wien.

(Eingelangt am 23. November 1951.)

Die verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung kann bekanntlich einerseits durch mehrfache Integrale, anderseits durch die verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen gelöst werden. Der Zusammenhang zwischen Reihe und Integral wurde bereits von *Thomae*[1], *Goursat*, *Pochhammer* angegeben, z. B. findet man bei *Thomae*[1]:

$$F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2\end{matrix} x\right) = \frac{\Gamma(\beta_3)}{\Gamma(\alpha_3)\,\Gamma(\beta_3 - \alpha_3)} \int_0^1 u^{\alpha_3 - 1} (1-u)^{\beta_3 - \alpha_3 - 1} F\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2 \\ \beta_1, \beta_2\end{matrix} xu\right) du \tag{1}$$

In einer Reihe neuerer Arbeiten[2] wurde die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe durch Integrale dargestellt, deren Integrand ein Produkt hypergeometrischer, *Bessel*scher, *Whittaker*scher Funktionen, *Laguerre*scher, *Hermite*scher Polynome ist. Der Beweis wurde meistens durch Entwicklung der Integrale in Potenzreihen erbracht. Die Frage ist jedoch, wie man auf diese Integrale kommt. *Pochhammer*[3] bekam die $n-1$-fachen Integrale, indem er die hypergeometrische Differentialgleichung n-ter Ordnung auf direktem Wege durch rekursive Integrale löste. In der folgenden Arbeit soll nun gezeigt werden, daß auch diese erweiterten Integraldarstellungen auf einfache Weise aus der hypergeometrischen Differentialgleichung hergeleitet werden können.

Ist nämlich $y = {}_pf_{q-1}(x)$ eine particuläre analytische Lösung der Differentialgleichung

---

[1] *Thomae:* Math. Ann. 2, p. 429 (4); ich benütze hier die von *E. Winkler* in: Über die hypergeometrische Differentialgleichung n-ter Ordnung, Inauguraldissertation München 1931, benützte Schreibweise. (1) enthält die von *Erdely* angegebene Formel (Quart. J. VIII, p. 203).

[2] *Erdely, Meijer*, u. a.

[3] *Pochhammer:* Crelles J. f. Math. **102**, p. 76.

$$[(\mathfrak{d}+\varrho_1-1)(\mathfrak{d}+\varrho_2-1)\ldots(\mathfrak{d}+\varrho_q-1)-x(\mathfrak{d}+\alpha_1)(\mathfrak{d}+\alpha_2)\ldots(\mathfrak{d}+\alpha_p)]\,y=0$$

$$\mathfrak{d}=\frac{d}{d\log x} \tag{2}$$

und $y(t)={}_ng_{m-1}(t)$ eine particuläre analytische Lösung der Differentialgleichung

$$[\mathfrak{d}-\beta_1+1)(\mathfrak{d}-\beta_2+1)\ldots(\mathfrak{d}-\beta_m+1)-(-1)^{m+n}t$$
$$(\mathfrak{d}-\sigma_1+2)(\mathfrak{d}-\sigma_2+2)\ldots(\mathfrak{d}-\sigma_n+2)]\,y=0, \tag{3}$$

so ist das Integral

$$y={}_{p+m}J_{q+n-1}(x)=\text{const}\int_{t_1}^{t_2}{}_ng_{m-1}(t)\;{}_pf_{q-1}(x\,t)\,dt, \tag{4}$$

falls es existiert, eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$[(\mathfrak{d}+\varrho_1-1)\ldots(\mathfrak{d}+\varrho_q-1)(\mathfrak{d}+\sigma_1-1)\ldots(\mathfrak{d}+\sigma_n-1)-$$
$$-x(\mathfrak{d}+\alpha_1)\ldots(\mathfrak{d}+\alpha_p)(\mathfrak{d}+\beta_1)\ldots(\mathfrak{d}+\beta_m)]\,y=0. \tag{5}$$

Dabei sind als Grenzen t_1, t_2, die singulären Punkte des Integranden so zu wählen, daß die bei den später durchzuführenden partiellen Integrationen auftretenden Zusatzglieder wegfallen.

Der Operator $\mathfrak{d}_x=\dfrac{d}{d\log x}$ besitzt folgende charakteristische Eigenschaften:

1. a) $\mathfrak{d}_x f(xt)=\mathfrak{d}_{xt}f(xt)=\mathfrak{d}_t f(xt)$

   b) $\mathfrak{d}_{\frac{1}{x}}f(x)=-\mathfrak{d}_x f(x)$

2. a) $\mathfrak{d}(x^\alpha f(x))=x^\alpha(\mathfrak{d}+\alpha)f(x)$ (6)

   b) $\mathfrak{d}(e^{g(x)}f(x))=e^{g(x)}(\mathfrak{d}+x\,g'(x))f(x)$

3. $\int[(\mathfrak{d}+\alpha)g(t)]f(xt)\,dt=g(t)\,t\,f(xt)-\int g(t)[(\mathfrak{d}-\alpha+1)f(xt)\,dt$

Beweis von (4): Da ${}_pf_{q-1}(x)$ der Gl. (2) genügt, gilt, falls die Konvergenz der hier und später auftretenden Integrale vorausgesetzt wird,

$$\int_{t_1}^{t_2}[(\mathfrak{d}-\sigma_1+2)\ldots(\mathfrak{d}-\sigma_n+2)\,{}_ng_{m-1}(t)].[(\mathfrak{d}+\varrho_1-1)\ldots$$
$$\ldots(\mathfrak{d}+\varrho_q-1)\,{}_pf_{q-1}(xt)]\,dt=x\int_{t_1}^{t_2}t[(\mathfrak{d}-\sigma_1+2)\ldots$$
$$\ldots(\mathfrak{d}-\sigma_n+2)\,{}_ng_{m-1}(t)][(\mathfrak{d}+\alpha_1)\ldots(\mathfrak{d}+\alpha_p)\,{}_pf_{q-1}(xt)]\,dt.$$

Benützt man auf der rechten Seite Gl. (3), integriert auf beiden Seiten

partiell gemäß (6.3) nach ${}_n g_{m-1}(t)$, so ergibt sich unter der Voraussetzung, daß die Zusatzglieder zum Verschwinden gebracht werden können,

$$\int_{t_1}^{t_2} {}_n g_{m-1}(t)\,[(\mathfrak{d}+\sigma_1-1)\dots(\mathfrak{d}+\sigma_m-1)(\mathfrak{d}+\varrho_1-1)\dots$$

$$\dots(\mathfrak{d}+\varrho_q-1)]\,{}_p f_{q-1}(xt)\,dt = x\int_{t_1}^{t_2} {}_n g_{m-1}(t)\,[(\mathfrak{d}+\beta_1)\dots$$

$$\dots(\mathfrak{d}+\beta_m)(\mathfrak{d}+\alpha_1)\dots(\mathfrak{d}+\alpha_p)]\,{}_p f_{q-1}(xt)\,dt.$$

Aus (6, 1a) ergibt sich somit, daß (4) der Gl. (5) genügt.

Es ist jedoch manchmal vorteilhafter, in (4) t durch $1/t$ zu ersetzen. Bedenkt man, daß $t^{-2}\,{}_n g_{m-1}\left(\frac{1}{t}\right)$ der Differentialgleichung

$$[(\mathfrak{d}+\sigma_1)\dots(\mathfrak{d}+\sigma_n)-t(\mathfrak{d}+\beta_1+1)\dots(\mathfrak{d}+\beta_m+1)]\,y(t)=0 \qquad (7)$$

genügt, also gleich einen ${}_m h_{n-1}(t)$ mit obigen Parametern ist, so wird

$$J_{\substack{p+m\\ q+n-1}}(x) = \text{const}\int_{t_1}^{t_2} {}_m h_{n-1}(t)\;{}_p f_{q-1}\left(\frac{x}{t}\right)dt \qquad (8)$$

Als Grenzen t_1, t_2, kommen die Punkte $t=0,\ 1,\ \frac{1}{x},\ \infty$ für (4) in Frage, und zwar die Grenze $1/x$ nur dann, wenn $p=q$, d. h. $x=1$ singuläre Stelle der Bestimmtheit für (2) ist. Es kommt hier nur das einzige an der Stelle $x=1$ verzweigte Integral in Betracht[4]. Die Integrationsgrenze $t=1$ kann nur im Falle $m=n$ auftreten, wo wieder nur das an der Stelle $t=1$ verzweigte Integral von (3) genommen werden kann. Eine der Stellen $t=0,\ \infty$ ist im Allgemeinen eine Unbestimmtheitsstelle, es genügt jedoch, diese Stelle nach ∞ zu verlegen. Es treten an dieser Stelle neben den bekannten divergenten Reihen im Allgemeinen sog. anormale Reihen auf. Betrachtet man jedoch, um das Auftreten anormaler Reihen zu vermeiden, die Differentialgleichung

$$[(\mathfrak{d}+\varrho_1-1)\dots(\mathfrak{d}+\varrho_s-1)-x^{s-r}(\mathfrak{d}+\alpha_1)\dots(\mathfrak{d}+\alpha_r)]\,y=0$$

$$r<s\quad \mathfrak{d}=\frac{d}{d\log x} \qquad (9)$$

(Die entsprechende hypergeometrische Differentialgleichung wird hieraus erhalten, indem man $x=\xi^{\frac{1}{s-r}}$ setzt und beachtet, daß $\mathfrak{d}_x=(s-r)\,\mathfrak{d}_\xi$ ist), so kann diese als die einzige lineare Differentialgleichung mit

[4] Vgl. *Winkler*, Inauguraldissertation München.

rationalen Koeffizienten charakterisiert werden, welche $x = 0$ zur Stelle der Bestimmtheit besitzt

$$y_i(x) = x^{1-\varrho_i} P_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots s) \tag{10}$$

($P_i(x)$ sind dabei bekanntlich konvergente Potenzreihen, die in Ausnahmefällen noch mit Logarithmen behaftet sein können. Von diesen Fällen soll jedoch abgesehen werden) und an der Stelle $x = \infty$ formal durch Reihen

$$T_i(x) = x^{-\alpha_i} Q_i\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots r) \quad \alpha_l \neq \alpha_k \text{ für } l \neq k \tag{11}$$

$$T_{r+j}(x) = e^{\varepsilon_j^{s-r} x}\, x^{\alpha_{r+j}}\, \bar{Q}_j(1/x) \quad (j = 1, 2, \ldots s-r)$$

befriedigt wird. Die Konstanten ε_j^{s-r} sind $s-r$. Einheitswurzeln, genügen also der charakteristischen Gleichung

$$c^{s-r} - 1 = 0 \tag{12}$$

Die Größen α_i, ϱ_i sind willkürlich wählbar, während die Größen α_{r+j} und die in den Reihen $P_i(x), Q_i\left(\frac{1}{x}\right), \bar{Q}_j(1/x)$ vorkommenden Koeffizienten durch die Größen $\alpha_i, \varrho_i, \varepsilon_j^{s-r}$ eindeutig bestimmt sind, falls man noch voraussetzt, daß mindestens eine der Reihen $P_i(x)$, etwa $P_1(x)$, nach ganzen Potenzen von x^{s-r} fortschreitet. Für die Größen α_{r+j} ergibt sich z. B.

$$\alpha_{r+j} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r + 1 - \varrho_1 + 1 - \varrho_2 + \ldots + 1 - \varrho_s}{s-r} - \frac{r+s-1}{2} = \gamma, \tag{13}$$

sind also gleich.

Gemäß der Eigenschaft (11) ist die gesuchte Differentialgleichung an der Stelle $x = \infty$ vom Range 1, muß daher Koeffizienten von der Gestalt $p_i(x) = C_i + R_i\left(\frac{1}{x}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots s)$ besitzen, wobei zufolge (10) die Reihen $R_i\left(\frac{1}{x}\right)$ mit $\frac{1}{x^i}$ abbrechen müssen: Die Differentialgleichung besitzt somit notwendig die Gestalt

$$[(\mathfrak{d} + a_1) \ldots (\mathfrak{d} + a_s) + C_1 x (\mathfrak{d} + b_1) \ldots (\mathfrak{d} + b_{t_1}) + C_2 x^2 (\mathfrak{d} + c_1) \ldots \ldots (\mathfrak{d} + c_{t_2}) + \ldots + C_s x^s]\, y = 0$$

$$t_i \leqq s - i \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Zufolge der Voraussetzung für $P_1(x)$ und da die Ausnahmefälle ausgeschlossen sind, können nur die Größen C_{s-r}, $C_{2(s-r)} \ldots$

von Null verschieden sein und da die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung wegen (11) vom Grade r ist, muß $C_{2(s-r)} = C_{3(s-r)} = \ldots = 0$, $t_{s-r} = r$ sein.[5a]
Setzt man $y(x) = e^{cx} f(x)$, so bekommt man wegen (6, 2b)

$$P(f(x) = [(\mathfrak{d} + a_1 + c\,x) \ldots (\mathfrak{d} + a_s + c\,x) + C_{s-r}\, x^{s-r} (\mathfrak{d} + d_1 + c\,x) \ldots \ldots (\mathfrak{d} + d_r + c\,x)]\, f(x) = 0.$$

Die charakteristische Funktion $P(x^\alpha)$ erhält man hieraus wegen (6, 2a)

$$P(x^\alpha) = x^\alpha [(\mathfrak{d} + \alpha + a_1 + c\,x) \ldots (\mathfrak{d} + \alpha + a_s + c\,x) + + C_{s-r}\, x^{s-r} (\mathfrak{d} + \alpha + d_1 + c\,x) \ldots (\mathfrak{d} + \alpha + d_r + c\,x)\,(1) \qquad (13a)$$

Nullsetzen des Koeffizienten von $x^{\alpha+s}$ ergibt:

$$c^s + C_{s-r}\, c^r = 0.$$

Wegen (11) muß diese Gleichung mit (12) übereinstimmen, woraus sich

$$C_{s-r} = -1$$

$$P[y(x)] = [(\mathfrak{d} + a_1)(\mathfrak{d} + a_2) \ldots \ldots (\mathfrak{d} + a_s) - x^{s-r} (\mathfrak{d} + d_1)(\mathfrak{d} + d_2) \ldots (\mathfrak{d} + d_r)]\, y = 0$$

ergibt. Indem man nun einerseits die zur Stelle $x = 0$ gehörige determinierende Fundamentalgleichung durch Nullsetzen des Koeffizienten von x^ϱ in $P(x^\varrho)$ bestimmt,

$$(\varrho + a_1)(\varrho + a_r) \ldots (\varrho + a_s) = 0,$$

welche wegen (10) die Wurzeln $1 - \varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ besitzen muß, d. h. $a_i = \varrho_i - 1$, und anderseits die zu $x = \infty$ gehörige determinierende Gleichung bestimmt (Nullsetzen des Koeffizienten von $x^{s-r+\tau}$ in $P(x^\tau)$,

$$(\tau + d_1)(\tau + d_2) \ldots (\tau + d_r) = 0$$

erhält man wegen (11) $d_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots r)$.

Teilt man die komplexe x-Ebene durch $N = (s - r)(s - r - 1)$ Halbgerade $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_N$, für welche

$$\mathrm{Re}\,\{(\varepsilon_j^{s-r} - \varepsilon_k^{s-r})\, x\} = 0 \qquad j \neq k \qquad (14)$$

ist, in N Sektoren ein, so existiert zufolge der *Birkhoff*schen Arbeit über das verallgemeinerte *Riemann*sche Problem[5] innerhalb jedes Sektors

$$\tau_m \leqq \arg x < \tau_{m+1}\,(m = 1, 2, \ldots N) \qquad (15)$$

---

[5] *Birkhoff:* The generalized Riemann problem. Proc. of Am. Ac. of arts and sciences 49, Nr. 9 (1913), p. 521f.

[5a] Dies ergibt sich sofort durch Einsetzen der Reihenentwicklungen für $P_1(x)$ bzw. $T_1(x)$ gemäß 2a) aus (6).

ein Fundamentalsystem $y_i^{(m)}(x)$, welches innerhalb dieses Sektors durch die Reihen (11) asymptotisch dargestellt wird:

$$y_i^{(m)}(x) \asymp T_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

Somit ist auch das Verhalten der allgemeinen Lösung innerhalb jedes dieser Sektoren bestimmt. Wichtig ist das Verhalten des zu $x = 0$ gehörigen Fundamentalsystems.

$$y_i(x) = x^{1-\varrho_i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{r} \Gamma\left(\frac{\alpha_k + 1 - \varrho_i}{s-r} + j\right)}{\prod_{k=1}^{s} \Gamma\left(\frac{\varrho_k - \varrho_i}{s-r} + 1 + j\right)} \left(\frac{x}{s-r}\right)^{(s-r)j} \qquad (i=1,2,\ldots s) \quad (16)$$

für $x = \infty$ anzugeben. Innerhalb jedes Sektors (15) gilt:

$$y_i(x) = c_{1i}^{(m)} y_1^{(m)}(x) + c_{2i}^{(m)} y_2^{m}(x) + \ldots + c_{si}^{(m)} y_s^{(m)}(x)$$

dabei kann keiner der Koeffizienten $c_{ji}^{(m)}$ verschwinden, da die Differentialgleichung (9) falls die Größen $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_s$ verschieden sind, in diesen Größen symmetrisch ist, so daß sowohl die mit e-Potenzen behafteten Reihen $T_i(x)$ als auch die nicht mit e-Potenzen behafteten Reihen $T_i(x)$ in den Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s$ symmetrisch sein müssen. (Ansonsten würde man z. B. zu einem festen ε_j^{s-r} mehrere Reihen $e^{\varepsilon_j^{s-r} x} x^{\nu} \sum_i^{\infty} a_i^{(j)} x^{-i}$ bekommen, was der Eindeutigkeit der Lösung von (9) widerspricht). Dies gilt somit auch für alle $y_j^{(m)}(x)$[6]. Würde somit ein $y_i(x)$ als Linearkombination von h Funktionen $y_j^{(m)}(x)$ $(h < s)$ darstellbar sein, dann auch alle $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots s)$, was der linearen Unabhängigkeit dieser Integrale widerspricht. Da das Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung (9) an der Stelle $x = \infty$ unabhängig davon ist, ob gewisse der ϱ_i zusammenfallen oder nicht, gilt dies allgemein. Man könnte die Symmetrie der Reihen $T_i(x)$ in den Größen ϱ_i auch direkt durch Aufstellung der Rekursionsformeln für diese Reihen (entsprechend zu (13a)) nachweisen. $y_i(x)$ verhält sich somit innerhalb jedes Sektors (15) wie die Reihe[7]

---

[6] Bei geeigneter Normierung.

[7] Vgl. Barnes: The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. Proc. London Math. Soc. Vol. 5 (1907), p. 115-Ebenso Newsom: The asymptotic behavior of a class of entire functions. Amer. J. Math. Vol. LXV (1943) p. 450, woraus sich die Übergangssubstitutionen zwischen den $y_i(x)$ und geeignet normierten $y_j^{(m)}(x)$ im Falle $r = 0$ ergeben.

$$c_{l_i}^{(m)} e^{\varepsilon_l^{s-r} x} x^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(l)} x^{-j},$$

wobei innerhalb dieses Sektors

$$\mathrm{Re}\,(\varepsilon_l^{s-r} x) = \max \mathrm{Re}\,(\varepsilon_j^{s-r} x)\ (j = 1, \ldots s - r)$$

ist. (Für $\arg x = \tau_m$ ist noch, falls

$$\mathrm{Re}\,(\varepsilon_l^{s-r} x) = \mathrm{Re}\,(\varepsilon_h^{s-r} x) = \max \mathrm{Re}\,(\varepsilon_j^{s-r} x)\ (j = 1, \ldots s - r) \text{ ist,}$$

$$y_i(x) \asymp c_{l_i}^{(m)} e^{\varepsilon_l^{s-r} x} x^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(l)} x^{-j} + c_{h_i}^{(m)} e^{\varepsilon_h^{s-r} x} x^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(h)} x^{-j}$$

möglich).

Setzt man in (4) der Einfachheit halber $n \leqq m$, $p \leqq q$ voraus, und nimmt für ${}_n f_{m-1}(t)$ bzw. ${}_p f_{q-1}(xt)$ eine der zur Stelle $t=0$ gehörigen Lösungen, so ergibt sich als Konvergenzbedingung, falls der Integrationsweg in einer bestimmten Richtung σ gegen ∞ verläuft, in welcher sich

${}_n g_{m-1}(t)$ wie $e^{\varepsilon^{m-n}(m-n) t^{\frac{1}{m-n}}}$ bzw. ${}_p f_{q-1}(xt)$ wie $e^{\varepsilon^{q-p}(q-p)(xt)^{\frac{1}{q-p}}}$ verhält[8]:

$$\mathrm{Re}\,[(\varepsilon^{m-n}(m-n) t^{\frac{1}{m-n}} + \varepsilon^{q-p}(xt)^{\frac{1}{q-p}}] < 0.$$

(Die Größe ε^{q-p} ist dabei noch von x abhängig!) Ist $p = q$, d. h. ${}_p f_{q-1}$ verhält sich an der Stelle ∞ bestimmt, so werden die Integrale im Falle $m \geqq n + 3$ nicht konvergent sein, während für $m = n + 2$ bei Integration längs bestimmter Wege Konvergenz erzeugt werden kann (z. B. wenn der Integrand Besselfunktionen enthält), für $m = n + 1$ falls $\mathrm{Re}\,(t) \leqq 0$ ist. Man sieht auch ein, daß dann die bei den partiellen Integrationen auftretenden Zusatzglieder zum Verschwinden gebracht werden können.

Als Beispiel werde folgende Formel abgeleitet: Bezeichnet man mit ${}_{m-2}J_{m-1}(x)$ die durch die Reihe

$$ {}_{m-2}J_{m-1}(x) = x^{-\sigma_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m-2} \Gamma(\beta_j + 1 - \sigma_1 + i)}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\sigma_j + 1 - \sigma_1 + i)} x^i \qquad (18)$$

dargestellte analytische Funktion, welche der Differentialgleichung

[8] Der Wert der hier auftretenden Wurzeln ist durch geeignete Verzweigungsschnitte in der t- bzw. x-Ebene eindeutig festzulegen.

$$[(\mathfrak{d}_x+\sigma_1)(\mathfrak{d}_x+\sigma_2)\dots(\mathfrak{d}_x+\sigma_m)-x(\mathfrak{d}_x+\beta_1+1)(\mathfrak{d}_x+\beta_2+1)\dots$$
$$\dots(\mathfrak{d}_x+\beta_{m-2}+1)]\,y=0 \text{ bzw. } (x=-\zeta^2)$$
$$[(\mathfrak{d}_\zeta+2\sigma_1)(\mathfrak{d}_\zeta+2\sigma_2)\dots(\mathfrak{d}_\zeta+2\sigma_m)+4\zeta^2(\mathfrak{d}_\zeta+2\beta_1+2)$$
$$(\mathfrak{d}_\zeta+2\beta_2+2)\dots(\mathfrak{d}_\zeta+2\beta_{m-2}+2)]\,y=0 \qquad (19)$$

genügt. (Diese Differentialgleichung stellt eine Verallgemeinerung der *Bessel*schen Differentialgleichung mit der Variablen 2ζ dar), und mit ${}_pF_{q-1}(x)$

$${}_pF_{q-1}(x)=x^{1-\varrho_1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(\alpha_j+1-\varrho_1+i)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(\varrho_j+1-\varrho_1+i)}x^i \quad p\leqq q \qquad (20)$$

so gilt für die durch die Reihe

$${}_{p+m-2}F_{q+m-1}(x)=x^{1-\varrho_1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(\alpha_j+1-\varrho_1+i)\prod_{j=1}^{m-2}\Gamma(\beta_j+1-\varrho_1+i)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(\varrho_j+1-\varrho_1+i)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\sigma_j+1-\varrho_1+i)}x^i \qquad (21)$$

definierte Funktion

$${}_{p+m-2}F_{q+m-1}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{(-i\infty,+i\infty)}{}_{m-2}J_{m-1}(t^2)\,{}_pF_{q-1}\left(\frac{x}{t^2}\right)t\,dt \qquad (22)$$

falls $\mathrm{Re}(2\varrho_1)<\mathrm{Min}\{\mathrm{Re}(2\beta_k+2),\mathrm{Re}(\sigma_1+\dots+\sigma_m-\beta_1-\dots-\beta_{m-2}+\tfrac{1}{2})\}$
$(k=1,2,\dots m-2)$

ist. Der Integrationsweg $(-i\infty,+i\infty)$ ist dabei längs der imaginären Achse zu führen, wobei jedoch der Punkt $t=0$ vermieden wird, indem ein in der positiven Halbebene gelegener Halbkreis vom Radius r, der für $p<q$ beliebig klein sein kann: $r>0$, und im Falle $p=q$ $r>|x^{\frac{1}{2}}|$ erfüllen muß, gewählt wird. Diese Formel stellt eine Verallgemeinerung der von *Meijer*[9] angegebenen Formel ($m=0$) dar. Um einen eindeutigen Zweig der durch die Reihe (18) definierten Funktion zu bekommen, soll von 0 nach $-\infty$ entlang der negativen reellen Achse ein Verzweigungsschnitt geführt werden und $x^{-\sigma_1}$ soll für $x=1$ den Wert 1 annehmen. Ähnlich muß auch für ${}_pF_{q-1}(x)$ vorgegangen werden[10].

[9] *Meijer:* Über Besselsche, Lommelsche, Whittakersche Funktionen. (Erste Mitteilung.) Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 42 (1939), p. 872.

[10] Vgl. *Winkler*, Inauguraldissertation München 1931.

Zunächst beweise ich die Hilfsformel

$$\int_0^\infty {}_{m-2}J_{m-1}(e^{\pi i}t^2)\,t^{\mu-1}\,dt = e^{\pi i(-\sigma_1)}\,\frac{\Gamma(\frac{\mu}{2}-\sigma_1)\prod_{j=1}^{m-2}\Gamma(\beta_j+1-\frac{\mu}{2})}{2\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\sigma_j+1-\frac{\mu}{2})} \tag{23}$$

welche gültig ist, falls $\mathrm{Re}\,(2\,\sigma_1) < \mathrm{Re}\,(\mu) < \mathrm{Min}\,\{\mathrm{Re}\,(2\,\beta_k+2),$ $\mathrm{Re}\,(\sigma_1+\ldots+\sigma_m-\beta_1-\ldots-\beta_{m-2}+\tfrac{1}{2})$ ist. Genau wie bei *Watson*[11] ergibt sich nämlich, falls $\mathrm{Re}\,(a \pm 2\,i\,b) > 0$, $\mathrm{Re}\,(-\sigma_1+\frac{\mu}{2}) > 0$ ist,

$$\int_0^\infty e^{-at}\,{}_{m-2}J_{m-1}(e^{\pi i}b^2t^2)\,t^{\mu-1}\,dt = \frac{(e^{\pi i}b^2)^{-\sigma_1}}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{4}{a^2}\right)^{-\sigma_1+\frac{\mu}{2}}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m-2}\Gamma(\beta_j+1-\sigma_1+i)\,\Gamma(\frac{\mu+1}{2}-\sigma_1+i)\,\Gamma(\frac{\mu}{2}-\sigma_1+i)}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\sigma_j+1-\sigma_1+i)}\left(\frac{-4\,b^2}{a^2}\right)$$

Dabei ist auf der rechten Seite im Falle $|\,2\,b\,| > |\,a\,|$ die analytische Fortsetzung dieser Reihe zu verstehen. Setzt man $b=1$, $\frac{4}{a^2}=x$, und drückt die durch obige Reihe definierte analytische Funktion durch das zur Stelle $x=\infty$ gehörige Fundamentalsystem aus[12], setzt $\mathrm{Re}\,(\beta_k+1-\frac{\mu}{2}) > 0$ $(k=1,2,\ldots m-2)$ voraus und geht mit $x \to \infty$, so ergibt sich als Grenzwert der rechten Seite die rechte Seite von (23) und als Grenzwert der linken Seite $(a \to +0)$ zufolge der Konvergenzbedingung das Integral (23).

Eine entsprechende Formel erhält man, wenn man in (23) $e^{\pi i}$ durch $e^{-\pi i}$ ersetzt. Wird nun in (23) bzw. in jenem Integral, welches statt $e^{\pi i}$ $e^{-\pi i}$ enthält, μ durch $\mu-2\,k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ ersetzt,

---

[11] *G. N. Watson:* A treatise on the theory of Besselfunctions, p. 384.

[12] Vgl. *Mellin:* Abriß e. einheitlichen Theorie d. Gamma- u. Hypergeometr. Funktionen, Math. Ann. Bd. 68, S. 334; oder *Winkler:* Inauguraldissertation, München.

$$\int_0^\infty {}_{m-2}J_{m-1}(e^{\pm\pi i}t^2)\,t^{\mu-2k-1}\,dt = e^{\pm\pi i(-\sigma_1)}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\mu}{2}-\sigma_1-k)\prod_{j=1}^{m-2}\Gamma(\beta_j+1-\frac{\mu}{2}+k)}{2\prod_{j=2}^{m}\Gamma(\sigma_j+1-\frac{\mu}{2}+k)}$$

$$\mathrm{Re}\,(2\sigma_1+2k) < \mathrm{Re}\,(\mu) < \mathrm{Min}\,\{\mathrm{Re}\,(2\beta_j+2),\ \mathrm{Re}\,(\sigma_1+\ldots+ +\sigma_m-\beta_1-\ldots-\beta_{m-2}+\tfrac{1}{2})\}+2k$$

und in den ersteren Integral (oberes Vorzeichen) statt t die neue Integrationsvariable $e^{\frac{-\pi i}{2}}t$, und in dem zweiten Intergal (unteres Vorzeichen) statt t die Variable $e^{\frac{\pi i}{2}}t$ eingeführt, faßt beide Integrale zusammen, wobei dem Punkte $t=0$ durch einen in der positiven Halbebene gelegenen Halbkreis vom Radius $r>0$ ausgewichen wird, so ergibt sich[13]:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{(-i\infty,+i\infty)} {}_{m-2}J_{m-1}(t^2)\,t^{\mu-2k-1}\,dt = \frac{\prod_{j=1}^{m-2}\Gamma(\beta_j+1-\frac{\mu}{2}+k)}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\sigma_j+1-\frac{\mu}{2}+k)}$$

$$\mathrm{Re}\,(\mu) < \mathrm{Min}\,\{\mathrm{Re}\,(2\beta_j+2),\ \mathrm{Re}\,(\sigma_1+\ldots+\sigma_m-\beta_1-\ldots- -\beta_{m-2}+\tfrac{1}{2})\ (j=1,2,\ldots m-2).$$

Setzt man für ${}_pF_{q-1}(\frac{x}{t^2})$ die Reihenentwicklung ein, so ergibt sich nach gliedweiser Integration Formel (22). Dabei ist im Falle $p=q$ $r>|x^{1/s}|$, im Falle $p<q$ $r>0$ beliebig, anzunehmen.

Um die Analogie mit (8) herzustellen, braucht man nur eine neue Integrationsvariable einzuführen, indem man t^2 durch t ersetzt.

$$p+m-2F_{q+m-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(-\infty,0)} {}_{m-2}J_{m-1}(t)\ {}_pF_{q-1}(\frac{x}{t})\,dt \qquad (24)$$

Bedingungen wie oben, $(-\infty, 0)$: $-\infty$ bis $-r$, Kreis $re^{i\varphi}$, $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$ im positiven Sinne durchlaufen und $-r$ bis $-\infty$, $r>0$, bzw. $r>|x|$).

Auf ähnliche Weise bekommt man die Formel:

---

[13] Vgl. *Meijer*, Proc. Amsterdam **42**, p. 873.

$$ {}_{p+m-1}F_{q+m-1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(-\infty,0)} {}_{m-1}L_{m-1}(t)\, {}_pF_{q-1}\left(\frac{x}{t}\right) dt \quad (25) $$

Dabei hat ${}_pF_{q-1}(x)$ die Bedeutung wie in (20),

$$ {}_{m-1}L_{m-1}(x) = x^{-\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m-1} \Gamma(\beta_j + 1 - \sigma_1 + i)}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\sigma_j + 1 - \sigma_1 + i)} x^i $$

$$ {}_{p+m-1}F_{q+m-1}(x) = x^{1-\varrho_1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\alpha_j + 1 - \varrho_1 + i) \prod_{j=1}^{m-1} \Gamma(\beta_j + 1 - \varrho_1 + i)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(\varrho_j + 1 - \varrho_1 + i) \prod_{j=1}^{m} \Gamma(\sigma_j + 1 - \varrho_1 + i)} x $$

$(-\infty, 0)$ ist wieder eine Schleife, die von $-\infty$ herkommend $t = 0$ im positiven Sinne umkreist und wieder nach $-\infty$ zurückkehrt. Im Falle $p = q$ muß jedoch wie oben auf dem ganzen Integrationswege $|t| > |x|$ sein. Bei der Ableitung von (25) ist

$$ \frac{1}{2\pi i} \int_{(-\infty,0)} {}_{m-1}L_{m-1}(t)\, t^{\mu-k-1} dt = \frac{\prod_{j=1}^{m-1} \Gamma(1 + \beta_j - \mu + k)}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(1 + \sigma_j - \mu + k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \quad (26) $$

zu benützen.

Als Konvergenzbedingung ergibt sich für (25) $\mathrm{Re}(\varrho_1) < \mathrm{Min}\{\mathrm{Re}(\beta_j + 1)\}$ bzw. für (26) $\mathrm{Re}(\mu) < \mathrm{Min}\{\mathrm{Re}(\beta_j + 1)\} + k$, $(j = 1, 2, \ldots m - 1)$.

Sätze über Primzahlen II.

Von

Walter Knödel, Wien.

(Eingelangt am 19. Dezember 1951.)

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1] habe ich mich mit der Frage beschäftigt, wie viele Zahlen $z < x$ der Bedingung genügen, daß das k-tupel

$$z + y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

mit

$$y_1 = 0,\ 0 < y_i < 2k \,.\, \log x \tag{1}$$

aus lauter Primzahlen besteht. Ich habe nachgewiesen, daß es Zahlsysteme (y_i) mit der Eigenschaft (E) gibt, daß zu ihnen „sehr viele" Primzahl-k-tupel gehören, nämlich mehr als

$$c_1(k) \cdot \frac{x}{\log^k x}.$$

Das ist auch schon die wahre Größenordnung für die Anzahl $\pi(k, x)$ ener k-tupel, denn gleichzeitig habe ich gezeigt, daß für jedes Zahlystem (y_i) die obere Abschätzung

$$\pi(k, x) < c_2(k; y \ldots y_k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \tag{2}$$

ilt. Für die Anzahl Z der Zahlsysteme (1) mit der Eigenschaft (E) abe ich als untere Schranke

$$c_3(k) \cdot \frac{\log^{k-1} x}{(\log\log\log x)^k} < Z$$

ngegeben. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Schranke auf die ahre Größenordnung zu verbessern. Ich zeige nämlich den Satz:

---

[1] Mh. Math. **55**, 62—75 (1951).

Es gibt eine Konstante c_4, die nur von k abhängt, so daß

$$c_4(k) \cdot \log^{k-1} x < Z.$$

Daß das schon die wahre Größenordnung von Z ist, folgt etwa aus Hilfssatz 11 der zitierten Arbeit, der gelautet hat

$$Z < c_6(k) \cdot \log^{k-1} x. \tag{2a}$$

Damit scheint mir auf diesem Gebiet eine Grenze erreicht zu sein, die nicht leicht zu überschreiten sein dürfte.

Beweis des Satzes.

Ich gehe zunächst genau so vor wie in meiner eingangs zitierten Arbeit und entnehme ihrem Hilfssatz 10, daß mir insgesamt mehr als

$$\frac{c_{13} \cdot x}{\log x} \qquad c_{13} > 0 \tag{3}$$

Primzahl-k-tupel zur Verfügung stehen, deren einzelne Primzahlen Abstände kleiner als $2k \cdot \log x$ besitzen. Für die Anwendung in einer anderen Arbeit lege ich auf die Feststellung wert, daß dabei nur solche k-tupel gezählt wurden, bei denen das Intervall $(p_1 = z + y_1,\ p_k = z + y_k)$ nur Primzahlen enthält, die selbst dem k-tupel angehören.

Ferner weiß ich aus (2), daß für ein festes System (1) gilt

$$\pi < c_2(k; y_1 \dots y_k) \cdot \frac{x}{\log^k x}.$$

Der Beweis der Behauptung beruht darauf, daß ich Hilfssatz 1 zeige:

Es gibt jedem ε mit $0 < \varepsilon < c_5$ ein δ mit $0 < \delta(\varepsilon, k)$, so daß

$$\sum_{y_1 \dots y_k} \pi < \frac{\varepsilon \cdot x}{\log x} < c_5 \cdot \frac{x}{\log x}, \tag{4}$$

wenn die Summation links in (4) höchstens über $\delta \cdot \log^{k-1} x$ Zahlsysteme (1) erstreckt wird.

Sobald Hilfssatz 1 gilt, folgt der eingangs behauptete Satz leicht. Denn zuerst zeige ich in Hilfssatz 2, daß die Zahlsysteme (1), die nicht die Eigenschaft (E) besitzen, von den nach (3) zur Verfügung stehenden Primzahl-k-tupeln nur $c_1 c_6 x / \log x$ enthalten. Dann lassen sich die k-tupel (3) (mit Ausnahme von $c_1 c_6 x / \log x$) auf die Zahlsysteme (1) mit der Eigenschaft (E) verteilen. Oder es muß gelten

$$\sum_{y_1 \cdots y_k} \pi \geqq (c_{13} - c_1 c_6) \frac{x}{\log x} = c_5 \frac{x}{\log x} \tag{5}$$

wobei die Summation über alle Zahlsysteme (y_i) mit der Eigenschaft (E) zu erstrecken ist. Da auch für diese der Hilfssatz 1 gilt, muß es deren mehr als $\delta(\varepsilon, k) \cdot \log^{k-1} x$ geben, denn gäbe es weniger, dann würde Hilfssatz 1

$$\sum_{y_1 \cdots y_k} \pi < c_5 \cdot \frac{x}{\log x}$$

liefern, was einen Widerspruch zu (5) darstellt. Damit ist der behauptete Satz mit $c_4(k) = \delta(\varepsilon, k) > 0$ bewiesen.

Beweis von Hilfssatz 2.

Ich muß zeigen

$$\sum'_{y_1 \cdots y_k} \pi < c_1 c_6 \frac{x}{\log x}.$$

Die Summation erstreckt sich über alle Systeme (y_i), die nicht die Eigenschaft (E) besitzen. Das sind jene Systeme, für die

$$\pi < c_1(k) \cdot \frac{x}{\log^k x}.$$

Zusammen mit (2a) ergibt das

$$\sum' \pi = c_1 \left(\frac{x}{\log^k x}\right) \cdot c_6(k) \cdot \log^{k-1} x = c_1 c_6 \left(\frac{x}{\log x}\right),$$

also die Behauptung.

Beweis von Hilfssatz 1.

Hier handelt es sich um

$$\sum_{y_1 \cdots y_k} \pi,$$

wobei die Systeme (y_i), über die summiert wird, die Anzahl δ nicht überschreiten sollen, sonst aber keiner Beschränkung unterliegen. Man entnimmt (2)

$$\sum \pi < \frac{x}{\log^k x} \cdot \sum_{y_1 \cdots y_k} c_2(k; y_1 \cdots y_k)$$

und meiner schon mehrfach zitierten Arbeit

$$c_2(k; y_1 \dots y_k) < c_7(k) \cdot \Pi(1 - \frac{1}{p_s})^{-k},$$

wobei das Produkt über jene Primzahlen p_s zu erstrecken ist, für die

$$\Pi_{i>k}(y_i - y_k) \equiv 0 \ (p_s) \tag{6}$$

gilt. Das liefert weiter

$$\Sigma \pi < c_7(k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \cdot \Sigma_{y_1 \dots y_k} \Pi(1 - \frac{1}{p_s^2})^{-k}.$$

Multipliziert man das Produkt mit

$$1 = \frac{\Pi(1 + \frac{1}{p_s})^k}{\Pi(1 + \frac{1}{p_s^2})^k},$$

dann kommt

$$\Sigma \pi < c_7(k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \Sigma_{y_1 \dots y_k} \frac{\Pi(1 + \frac{1}{p_s})^k}{\Pi(1 - \frac{1}{p_s})^k}.$$

Beachtet man, daß

$$\Pi_p(1 - \frac{1}{p^2})$$

konvergiert, dann kann man dafür auch schreiben

$$\Sigma \pi < c_8(k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \Sigma_{y_1 \dots y_k} \Pi(1 + \frac{1}{p_s})^k.$$

Nach einer oft verwendeten Schlußweise läßt sich das ersetzen durch

$$\Sigma \pi < c_9(k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \Sigma_{y_1 \dots y_k} \Pi(1 + \frac{2k}{p_s}). \tag{7}$$

Multipliziert man das Produkt aus, dann erhält man

$$\Pi(1 + \frac{2k}{p_s}) = \Sigma_d \frac{(2k)^{\nu(d)}}{d},$$

wobei sich nach (6) die quadratfreien Zahlen d aus lauter Primfaktoren zusammensetzen, die in

$$\Pi_{i>k}(y_i - y_k) \tag{8}$$

aufgehen, und wobei $\nu(d)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von d bezeichnet. Jetzt lautet also (7)

$$\Sigma \pi < c_9(k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \cdot \sum_{y_1 \cdots y_k} \sum_d \frac{(2k)^{\nu(d)}}{d}.$$

Vertauschen der Summationsfolge gibt

$$\Sigma \pi < c_9(k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \sum_d \frac{(2k)^{\nu(d)}}{d} \sum''_{y_1 \cdots y_k} 1. \tag{9}$$

Dabei ist die Summation zuerst über alle d zu erstrecken. Einen Beitrag zur zweiten Summe liefern aber nach (8) nur jene Kombinationen (y_i), für die

$$\prod_{i>j} (y_i - y_j) \equiv 0 \,(d) \tag{10}$$

ist. Die Hauptschwierigkeit des ganzen Beweises besteht darin abzuschätzen, wie oft das einzelne $\frac{1}{d}$ gezählt wird. Ich werde im folgenden für

$$\sum''_{y_1 \cdots y_k} 1 = f(d) \tag{11}$$

zwei Abschätzungen geben, von denen keine für sich ausreicht, beide zusammen aber das gewünschte Resultat liefern.

Erste Abschätzung von (11).

Nach Voraussetzung summiere ich über höchstens $\delta \cdot \log^{k-1} x$ Systeme (y_i). Daher gilt für jedes d

$$\Sigma'' < \delta \cdot \log^{k-1} x \tag{12}$$

Zweite Abschätzung von (11).

Aus (10) folgt, daß jeder Primteiler p_t von d in einer Differenz $y_j - y_i$ auftritt. Das Produkt aller p_t, die in $y_j - y_i$ aufgehen, bezeichne ich mit e_{ji}. Dann gilt erstens

$$\prod_{i,j} e_{ji} = d,$$

zweitens sind die e_{ji} paarweise teilerfremd, da ich nach der Bemerkung bei (8) d als quadratfrei annehmen darf. Drittens dürfen einzelne e_{ji} auch 1 sein. Und viertens gibt es höchstens k^2 solcher e_{ji}.

Nun denke ich mir ein festes d und zerlege es auf alle möglichen Arten in Faktoren e_{ji}. Nach dem vorigen gibt es höchstens

$$k^{2\nu(d)} \tag{13}$$

verschiedene Zerlegungen. Weiters ist $y_1 = 0$. Dann ist y_2 durch die Kongruenz

$$y_2 - y_1 \equiv 0 \,(e_{21})$$

bis auf Vielfache von e_{21} festgelegt. Dann kann ich y_2 im Intervall $(0, 2k \,.\, \log x)$ auf weniger als $\dfrac{4k \,.\, \log x}{e_2}$ Weisen wählen. Ist auch diese Auswahl getroffen, dann gelten für y_3 die Kongruenzen

$$y_3 - y_1 \equiv 0 \,(e_{31})$$
$$y_3 - y_2 \equiv 0 \,(e_{32})$$

und nach einem Satz der elementaren Zahlentheorie liegt y_3 dadurch mod. $e_{31} \,.\, e_{32}$ fest (e_{31} und e_{32} sind ja teilerfremd). Bei der Auswahl von y_3 stehen daher weniger als

$$\frac{2^2 \,.\, 2k \,.\, \log x}{e_{31} \,.\, e_{32}}$$

Möglichkeiten zu Gebote.

Hat man $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$ bereits festgelegt, dann gelten für y die Kongruenzen

$$y_i - y_j \equiv 0 \,(e_{ij}),\ j = 1, 2, \ldots, i-1$$

und daraus folgt, daß es für die Wahl von y_i weniger als

$$\frac{2^{i-1} \,.\, 2k \,.\, \log x}{\prod\limits_j e_{ij}} \tag{14}$$

Möglichkeiten gibt.

Auf diese Weise zählt man aber für festes d gerade jene Systeme (y_i), für die

$$(y_i - y_j) \equiv 0 \,(\prod_{i,j} e_{ij} = d)$$

wird; das sind aber auch jene Systeme, die zu (11) einen Beitrag liefern, so daß (13) und (14) ergeben

$$\sum''_{y_1 \cdots y_k} 1 = f(d) < k^{2\nu(d)} \,.\, \prod_i \frac{2^{i-1} \,.\, 2k \log x}{\prod\limits_j e_{ij}}$$

oder

$$\sum''_{y_1 \cdots y_k} 1 < (2^k \,.\, k)^k \,.\, k^{2\nu(d)} \,.\, \frac{\log^{k-1} x}{\prod\limits_{i,j} e_{ij}}$$

also

$$\sum''_{y_1 \cdots y_k} 1 < c_{10}(k) \,.\, k^{2\nu(d)} \,.\, \frac{\log^{k-1} x}{d}. \tag{15}$$

Ende des Beweises für Hilfssatz 1.

Ich gehe jetzt mit (15) in (9) ein:

$$\Sigma \pi < c_9(k) \frac{x}{\log^k x} \cdot \sum_d \frac{(2k)^{\nu(d)}}{d} \cdot c_{10}(k) \cdot k^{2\nu(d)} \frac{\log^{k-1} x}{d}$$

oder

$$\Sigma \pi < c_{11}(k) \frac{x}{\log x} \Sigma \frac{(2k^3)^{\nu(d)}}{d^2}.$$

Hier konvergiert $\sum_d$ (man vergleiche etwa die Schlußweise in einer Arbeit von *P. Erdös*, Bull. of the Am. Math. Soc. 54 (1948). Dann gibt es ein n_0, so daß

$$\sum_{d>n_0} \frac{(2k^3)^{\nu(d)}}{d^2} < \frac{\varepsilon}{2\, c_{11}(k)}. \tag{16}$$

Jetzt zerlege ich (9) in

$$\Sigma \pi < c_9(k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \cdot \sum_{d \leqq n_0} \frac{(2k)^{\nu(d)}}{d} \sum''_{y_1 \cdots y_k} 1 +$$

$$+ c_9(k) \cdot \frac{x}{\log^k x} \cdot \sum_{d>n_0} \frac{(2k)^{\nu(d)}}{d} \cdot \sum''_{y_1 \cdots y_k} 1.$$

Dann erhalte ich aus (12), (15) und (16)

$$\Sigma \pi < c_9(k) \frac{x}{\log^k x} \cdot c_{12}(n_0, k) \cdot \delta \cdot \log^{k-1} x + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Nimmt man jetzt noch

$$\delta(\varepsilon, k) < \frac{\varepsilon}{2\, c_9(k) \cdot c_{12}(n_0, k)},$$

dann folgt

$$\Sigma \pi < \varepsilon \frac{x}{\log x}$$

und alles ist bewiesen.

Der Satz von Malus und Dupin bei elliptischer Metrik und seine kinematische Deutung.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 29. Dezember 1951.)

Ohne auf seine tieferen Wurzeln, das *Huygens*sche und das *Fermat*sche Prinzip zurückzugreifen[1], wird im Folgenden ein direkter Beweis dieses Satzes für elliptische Metrik gegeben. Durch geometrische Deutung einer im Euklidischen Fall von *E. Cartan*[2], *W. Blaschke*[3] u. a. betrachteten Integralinvarianten erfolgt eine Verallgemeinerung für die Brechung (bzw. Spiegelung) eines beliebigen Strahlsystems. Schließlich wird der Satz von *Malus* und *Dupin* selbst kinematisch als Zusammensetzung oder Transformation flächenläufiger Drehvorgänge ausgelegt.

Wir gehen von einem zur absoluten Quadrik polaren Bezugstetraeder $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ aus. Mit $\mathfrak{P}_i$ bezeichnen wir nicht nur die Tetraederecken, sondern auch die sie darstellenden genormten Quaternionen[4]. $\mathfrak{P}_0$ beschreibe so die „brechende" Fläche, daß ihre Flächennormale in die Kante $\{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_3\}$ fällt. Da die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in der Tangentialebene dieser Fläche nur bis auf Drehungen um $\mathfrak{P}_0$ bestimmt sind, kann die Ebene $\{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_3\}$ als Einfallsebene gewählt werden, in der die Brechung nach *Snellius* erfolge. In der sphärischen Abbildung von *G. Fubini*, *J. Hjelmslev* = *Petersen* und *E. Study* seien $[\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}'_i]$ die Richtungsvektoren der Tetraederkanten $\{\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{P}_i\}$; sie erfüllen die Ableitungsgleichungen

---

[1] Vgl. etwa *C. Carathéodory*, Geometrische Optik, Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgeb. IV/5, Berlin-Springer (1937).

[2] *E. Cartan*, Bull. Soc. Math. de France, 24 (1896), 140—177.

[3] *W. Blaschke*, Vorl. ü. Differentialgeometrie I, 4. Aufl., Berlin-Springer (1945), 272.

[4] *W. Blaschke*, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Hamburger Math. Einzelschr., 34. Heft (1942).

$$d\,\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_j\,\omega_k - \mathfrak{r}_k\,\omega_j, \quad d\,\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{r}_j'\,\omega_k' - \mathfrak{r}_k'\,\omega_j' \tag{1}$$

mit $i, j, k = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2$ und $\omega_3 = \omega_3'$.

Die ω_i und ω_i' sind lineare Differentialformen (*Pfaff*sche Formen) in zwei Veränderlichen und erfüllen die Integrierbarkeitsbedingungen

$$d\,\omega_i = -[\omega_j\,\omega_k],\ d\,\omega_i' = -[\omega_j'\,\omega_k'] . \tag{2}$$

Die Klammern mögen hierbei alternierende Produktbildung, die Differentiale äußere Ableitungen im Sinne von *E. Cartan* andeuten.

Für den „einfallenden" Strahl können wir setzen

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 \sin\varphi + \mathfrak{r}_3 \cos\varphi,\ \ \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1' \sin\varphi + \mathfrak{r}_3' \cos\varphi . \tag{3}$$

Er werde nach dem Gesetz

$$\sin\varphi^* = n\ .\ \sin\varphi,\ \ n = \text{konst.} \tag{4}$$

in den Strahl

$$\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}_1 \sin\varphi^* + \mathfrak{r}_3 \cos\varphi^*,\ \ \mathfrak{r}^{*\prime} = \mathfrak{r}_1' \sin\varphi^* + \mathfrak{r}_3' \cos\varphi^* \tag{5}$$

übergeführt. Wegen (1) folgt aus (3)

$$d\,\mathfrak{r} = (\omega_2 + d\,\varphi)\,(\mathfrak{r}_1 \cos\varphi - \mathfrak{r}_3 \sin\varphi) + (\omega_3 \sin\varphi - \omega_1 \cos\varphi)\,\mathfrak{r}_2 \tag{6}$$

und daraus als Bedingung dafür, daß die einfallenden Strahlen ein Normalensystem bilden, die beiden sphärischen Bilder also flächentreu aufeinander bezogen sind,

$$[(\omega_2 + d\,\varphi)\ .\ (\omega_3 \sin\varphi - \omega_1 \cos\varphi)] = [(\omega_2' + d\,\varphi)\ .\ (\omega_3 \sin\varphi - \omega_1' \sin\varphi)] . \tag{7}$$

Setzen wir

$$\omega_i = \beta_i + \alpha_i,\ \ \omega_i' = \beta_i - \alpha_i, \tag{8}$$

so finden wir statt (7) kürzer

$$d\,(\alpha_1 \sin\varphi) = 0 \tag{9}$$

und erkennen somit in der *Pfaff*schen Form $\alpha_1 \sin\varphi$ ein vollständiges Differential als kennzeichnend für ein einfallendes Normalensystem. Nach (4) ist aber nun auch $\alpha_1 \sin\varphi^*$ ein vollständiges Differential und daher die Normalitätsbedingung für das gebrochene Strahlsystem ebenfalls erfüllt (Satz von *Malus* und *Dupin*).

Aus (9) leiten wir nun eine Integralinvariante (Unabhängigkeitsintegral) ab, durch die in der Einfallsebene das *Snelliussche* Brechungsgesetz gekennzeichnet ist. — Wir greifen aus einem beliebigen System einfallender Strahlen eine geschlossene Regelfläche[5] heraus und verfolgen auf ihr eine rechtwinkelige Querlinie bis sie wiederum zum

[5] Ihr entspreche in der Ebene der Parameter u, v unserer Fläche eine einfach geschlossene Kurve.

Ausgangsstrahl zurückkehrt. Auf dem durch (3) gegebenen Strahl $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'] = \{\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}\}$ mit

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \sin\varphi + \mathfrak{P}_3 \cos\varphi \tag{10}$$

wählen wir im Abstand ψ von $\mathfrak{P}_0$ einen Punkt

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_0 \cos\psi - \mathfrak{P} \sin\psi = \mathfrak{P}_0 \cos\psi - (\mathfrak{P}_1 \sin\varphi + \mathfrak{P}_3 \cos\varphi) \sin\psi. \tag{11}$$

Aus (1) ergeben sich die Ableitungsgleichungen für die Ecken $\mathfrak{P}_i$ des Bezugstetraeders

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{P}_0 &= \quad . \quad + \alpha_1 \mathfrak{P}_1 + \alpha_2 \mathfrak{P}_2 \quad . \\ d\,\mathfrak{P}_1 &= -\alpha_1 \mathfrak{P}_0 \quad . \quad + \beta_3 \mathfrak{P}_2 - \beta_2 \mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_2 &= -\alpha_2 \mathfrak{P}_0 - \beta_3 \mathfrak{P}_1 \quad . \quad + \beta_1 \mathfrak{P}_3 \\ d\,\mathfrak{P}_3 &= \quad + \beta_2 \mathfrak{P}_1 - \beta_1 \mathfrak{P}_2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Mit ihrer Hilfe berechnen wir $d\,\mathfrak{Q}$ und daraus die Bedingung des rechtwinkeligen Durchsetzens:

$$(\mathfrak{P}_0\, d\,\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}\, d\,\mathfrak{Q}) = 0 \tag{13}$$

oder

$$d\,\psi = \alpha_1 \sin\varphi. \tag{14}$$

Wir erhalten also eine rechtwinkelige Querlinie für

$$\psi = \int \alpha_1 \sin\varphi + \psi_0,\ \psi_0 = \text{konst.} \tag{15}$$

Diese Kurve kehrt im allgemeinen nicht in den Ausgangspunkt zurück, sondern trifft bei einem Umlauf der geschlossenen Regelschar die Ausgangserzeugende in einem vom Anfangspunkt verschiedenen Punkt in der Entfernung

$$\oint \alpha_1 \sin\varphi. \tag{16}$$

Diese von der Wahl der Querlinie unabhängige Größe nennen wir mit *W. Blaschke* „Öffnung" der geschlossenen Regelfläche[6].

Aus (4) folgt nun sofort, daß die Öffnung einer geschlossenen Regelfläche bei Ausübung einer *Snelliuss*chen Brechung abgesehen von einem festen Zahlenfaktor (Brechungsindex) unverändert bleibt. Es bietet keine Schwierigkeit das invariante Randintegral (16) mittels der *Stokes*schen Formel als Doppelintegral zu schreiben, wobei über sämtliche Kongruenzstrahlen integriert wird, die von der Randschar umschlossen werden. — Liegt im besonderen die Regelfläche in einem Normalensystem, so verschwindet nach (9) die Öffnung (16); gilt dies umgekehrt für sämtliche geschlossenen Regelscharen eines Strahlsystems, so ist dieses ein Normalensystem. — Wir haben somit hierin

[6] „Pitch of the pencil" bei *R. Behari*, The Differential Geometry of ruled surfaces, Lucknow University Studies No. XVIII (1946).

eine Verallgemeinerung des Satzes von *Malus* und *Dupin* auf beliebige Strahlsysteme des elliptischen Raumes[7].

Verfolgen wir nun den Satz von *Malus* und *Dupin* (in der engen Fassung für Normalensysteme) in der sphärischen Abbildung, so ergibt sich folgender geometrischer Sachverhalt:

Werden zwei flächentreue Abbildungen $\mathfrak{r}_3 \leftrightarrow \mathfrak{r}_3'$ und $\mathfrak{r} \leftrightarrow \mathfrak{r}'$ einer „linken" auf eine „rechte" Kugel durch Winkelgleichheit $\sphericalangle\, \mathfrak{r}_3\, \mathfrak{r} = \sphericalangle\, \mathfrak{r}_3'\, \mathfrak{r}' = \varphi$ auf einander bezogen, so erhält man wiederum eine flächentreue Abbildung $\mathfrak{r}^* \leftrightarrow \mathfrak{r}^{*\prime}$, wenn die linken (ungestrichenen), wie die rechten (gestrichenen) Vektoren jeweils komplanar sind und die Winkelgleichheit $\sphericalangle\, \mathfrak{r}_3\, \mathfrak{r}^* = \sphericalangle\, \mathfrak{r}_3'\, \mathfrak{r}^{*\prime} = \varphi^*$ mit der Bedingung (4) erfüllen. Der Vektor $\mathfrak{r}^*$ geht also aus $\mathfrak{r}$ durch *Snelliussche* Brechung an der linken Kugel hervor, wobei $\mathfrak{r}_3$ als Normalenvektor fungiert. Gleiches gilt für die rechte Kugel.

Zwecks kinematischer Deutung dieses klassischen Satzes der Strahlenoptik beachten wir die *Eulersche* Darstellung der Drehungen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes um einen festen Punkt $\mathfrak{o}$ mittels Quaternionen: Ein Punkt $\mathfrak{x}$ mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}$ wird in den Punkt $\mathfrak{x}'$ mit

$$\overrightarrow{\mathfrak{o}\,\mathfrak{x}'} = \mathfrak{x}' = \overline{\mathfrak{P}}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{P} \tag{17}$$

gedreht; hierbei ist $\overline{\mathfrak{P}}$ zur genormten Quaternion $\mathfrak{P}$ konjugiert. *C. Stéphanos* entdeckte, daß der dreidimensionale Parameterraum (Gruppenraum) dieser Drehungen eine elliptische Maßbestimmung trägt. Der Drehung (17), d. h. der Quaternion $\pm\,\mathfrak{P}$, kann also der Punkt $\mathfrak{P}$ unseres elliptischen Raumes zugeordnet werden. Die Kurven des Parameterraumes sind somit Bilder von eingliedrigen oder zwangläufigen Drehvorgängen, während Flächen zweigliedrigen oder flächenläufigen Drehvorgängen entsprechen. Es erscheint zweckmäßig, die Drehungen des Bündels $\mathfrak{o}$ auf der Einheitskugel um $\mathfrak{o}$ zu verfolgen.

Neben der brechenden Fläche des Satzes von *Malus* und *Dupin* betrachten wir nun im elliptischen Raum rechtwinkelige Querflächen, sowohl des einfallenden, wie des gebrochenen Normalensystems; ihnen entsprechen jeweils flächenläufige Drehvorgänge der Kugel. Die Drehpole aller eingliedrigen Drehvorgänge, die aus einem zweigliedrigen Drehvorgang an einer Stelle herausgehoben werden können, liegen

[7] Vgl. für den Euklidischen Raum auch *R. Behari* l. c.

in Gang-, wie Rastkugel auf je einem Großkreis. Die sphärischen Mittelpunkte dieser Drehpolkreise oder kurz „Polkreise" mögen (in Ermanglung eines anderen Wortes) als „Pole" des flächenläufigen Drehvorganges bezeichnet werden, sie sind die sphärischen Bilder der Flächennormalen der Bildfläche im Parameterraum und daher flächentreu aufeinander bezogen[8]. Die Flächentreue dieser Polzuordnung, d. h. die Dichtetreue der Polkreiszuordnung bemerkte *R. Bricard*[9]. — Umgekehrt ist durch eine solche flächentreue Polzuordnung eine einparametrige Schar „paralleler" zweigliedriger Drehvorgänge bestimmt.

Zufolge des Satzes von *Malus* und *Dupin* ergibt sich nun eine Zusammensetzung zweier flächenläufigen Drehvorgänge zu einer einparametrigen Schar von ebensolchen parallelen Drehvorgängen, bei der die Pole in der früher angegebenen Weise aufeinander bezogen sind und die Zusammensetzung der „Bahnen" eines beliebigen, auf der Gangkugel befestigten Punktes $\mathfrak{x}$ (Ausgangslage) leicht vorgenommen werden kann.

Der Drehvorgang, der der brechenden Fläche $\mathfrak{P}_0$ entspricht, führt $\mathfrak{x}$ in den Punkt

$$\mathfrak{x}_0' = \overline{\mathfrak{P}}_0\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{P}_0 \tag{18}$$

der Rastkugel über. Für die rechtwinkelige Querfläche $\mathfrak{Q}$ des einfallenden Normalensystems gilt (11), wobei als Orthogonalitätsbedingung (9), sowie (14) und (15) — jetzt natürlich in zwei unabhängigen Veränderlichen — erfüllt sind. Die Quaternion $\mathfrak{Q}$ können wir auch in der Form schreiben

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_0 (\cos\psi - \mathfrak{r}' \sin\psi) = \mathfrak{P}_0\, \mathfrak{R} \tag{19}$$

mit

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1' \sin\varphi + \mathfrak{r}_3' \cos\varphi \text{ und } \mathfrak{R} = \cos\psi - \mathfrak{r}' \sin\psi. \tag{20}$$

Der auf der Gangkugel feste Punkt $\mathfrak{x}$ geht nun durch den Drehvorgang $\mathfrak{Q}$ in den Punkt

$$\mathfrak{x}' = \overline{\mathfrak{Q}}\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{Q} = \overline{\mathfrak{R}}\, \overline{\mathfrak{P}}_0\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{P}_0\, \mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}}\, \mathfrak{x}_0'\, \mathfrak{R} \tag{21}$$

des Rastraumes über. Ganz entsprechende Formeln in gestirnten Größen gelten nun für die rechtwinkeligen Querflächen des gebrochenen Normalensystems und die zugehörigen zweigliedrigen Drehvorgänge, wobei wegen (4) und (15)

$$\psi^* = n\,\psi + \psi_0^*,\ \psi_0^* = \text{konst.} \tag{22}$$

---

[8] Vgl. *H. R. Müller*, Monh. f. Math. **55** (1950), 28—42.
[9] *R. Bricard*, C. R. Acad. Sci., Paris **166** (1918), 734—735.

gilt und ψ_0^* die Rolle des Scharparameters übernimmt.

Aus (20), (21) entnehmen wir nun, daß auf der Rastkugel der Punkt $\mathfrak{x}_0'$ um den Pol $\mathfrak{r}'$ durch den Winkel -2ψ in den Punkt $\mathfrak{x}'$ gedreht wird. In gleicher Weise wird $\mathfrak{x}_0'$ in $\mathfrak{x}^{*\prime}$ übergeführt, wobei der Vektor zum Pol $\mathfrak{r}^{*\prime}$ als Drehachse fungiert und $-2\psi^*$ der Drehwinkel ist, somit also eine Drehung durch den n-fachen Winkel gegenüber dem ersten Fall bei Freiheit einer additiven Konstanten (entsprechend den einzelnen Querflächen der gebrochenen Strahlen) erfolgt. Der Zusammenhang der Pole $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}^{*\prime}$ ist nach früherem durch das Brechungsgesetz von *Snellius* für $\mathfrak{r}_3'$ als Normalenrichtung gegeben. Hiemit ist die Zusammensetzung der Bewegungen gekennzeichnet.

Über die Scheitelpunkte der zwei- und dreidimensionalen Kurven.

Von

Arthur Moór, Debrecen (Ungarn).

(Eingelangt am 2. Januar 1952.)

Mit 1 Abbildung.

Einleitung.

Die Scheitelpunkte einer ebenen Kurve sind diejenigen Punkte, in welchen die Krümmung: $\varkappa(s)$ einen Extremwert hat. Ist $\varkappa''(s) \neq 0$, /die Striche bedeuten hier, wie auch im Folgenden, stets Ableitungen nach dem Bogenparameter: s der Kurve/, so kann man die Scheitelpunkte einer ebenen Kurve durch die Gleichung

$$\varkappa'(s) = 0$$

charakterisieren. Für eine Raumkurve werden wir als einen Scheitelpunkt der Kurve den Punkt P bezeichnen, in welchem die Invariante:

$$\mathfrak{C}(s) = \varphi' + \frac{\varkappa}{\tau}\left(\frac{\varphi\varkappa}{\tau}\right)' + \left\{\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varphi\varkappa}{\tau}\right)'\right]\right\}'$$

einen Extremwert hat. $\varkappa(s)$ bzw. $\tau(s)$ bedeuten im Ausdruck von $\mathfrak{C}(s)$ die Krümmung bzw. die Torsion der Kurve, während $\varphi(s)$ eine stetige und nach s differentierbare Funktion von $\varkappa, \tau$ ist. (Vgl. [3][1], Formel (10). Die hier gegebene Formel ist, wie das sich leicht verifizieren läßt für $\mathfrak{C}$ mit der, die ich in meinem Aufsatz [3] gegeben habe, identisch). Der Name „Scheitelpunkt" ist durch diejenige Eigenschaft von $\mathfrak{C}(s)$ berechtigt, daß $\mathfrak{C}'(s)$ längs einer geschlossenen Raumkurve: C immer mindestens vier Nullstellen hat, wenn durch je zwei Punkte der Kurve eine Ebene hindurchlegbar ist, die C in keinen anderen Punkten trifft. Gerade diese Eigenschaft hat auch die Funktion $\varkappa(s)$ für eine ebene Kurve. /Vgl. [1] und [3]/.

[1] Vgl. die Literatur am Ende.

In § 1 und § 2 werden wir zeigen, daß wenn ein Kreis bzw. eine Kugel die Kurve C in $(2n-2)$ Punkten schneidet, und diese Schnittpunkte zugleich Scheitelpunkte von C sind, dann noch zwei weitere Scheitelpunkte auf C existieren. Die Beweise werden wir durch zwei Integralformeln durchführen, die als die Erweiterungen der bei *W. Blaschke* in [2], § 12 angeführten Gleichung (89a), bzw. in [3] Gleichung (3) befindlichen Grundformeln betrachtet werden können.

In § 3 wollen wir an einigen expliziten Beispielen zeigen, daß die ziemlich komplizierte Invariante $\mathfrak{S}(s)$ in manchen Fällen eine einfache geometrische Bedeutung hat.

In § 4 wollen wir die Existenz der in Betracht gezogenen Kurven nachweisen. Endlich, werden wir in § 5 die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf höhere Dimensionen beweisen. Es wird sich zeigen, daß bei der Konstruktion der Invariante — deren Extremwerte die Scheitelpunkte bestimmen — ein Unterschied zwischen den ungeraden und zwischen den geraden Dimensionszahlen existiert.

§ 1. Der zweidimensionale Fall.

Es sei

$$x_i = x_i(s), \qquad (i = 1, 2) \tag{1}$$

eine ebene geschlossene Kurve mit dem Bogenparameter: s, deren Krümmung: $\varkappa(s)$ differentierbar ist. Es soll $\varkappa''(s) \neq 0$ bestehen, wo $\varkappa'(s) = 0$ ist. Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 1. Schneidet ein Kreis die ebene geschlossene Kurve (1) *nur in den Punkten* $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-2}$ *und sind die Punkte* P_i *Scheitelpunkte der Kurve* (1), *so hat die Kurve* (1) *noch mindestens zwei weitere Scheitelpunkte.*

Beweis: Bezeichnen wir die Kurve (1) mit C, dann beweisen wir erst das Lemma:

$$\oint_C [A(x_1^2 + x_2^2) + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0] \varkappa' \, ds = 0, \quad (A, a_i = \text{konst.}), \tag{2}$$

wo längs C integriert werden soll. Es ist nämlich wegen der Geschlossenheit der Kurve (1) die Invariante $\varkappa'(s)$ und auch $\varkappa(s)$ periodisch. Somit folgt sofort

$$\oint_C a_0 \varkappa' \, ds = 0. \tag{3}$$

Bedeute $\xi_i = x_i'$ den Tangentenvektor, η_i den Normalenvektor von C. ξ_i und η_i sind selbstverständlich Einheitsvektoren. Die Formeln von Frenet sind für die ebenen Kurven:

$$\xi_i' = \varkappa\, \eta_i \qquad (4a)$$

$$(i = 1, 2).$$

$$\eta_i' = -\varkappa\, \xi_i \qquad (4b)$$

Dann wird nach partieller Integration und unter Beachtung der Gleichung (4b) wegen der Geschlossenheit, d. h. wegen der Periodizität von $\eta_i(s)$:

$$\oint_C x_i\, \varkappa'\, ds = -\oint_C \varkappa\, \xi_i\, ds = \oint_C \eta_i'\, ds = 0, \qquad (i = 1, 2). \qquad (5)$$

Berechnen wir jetzt $\oint_C (x_1^2 + x_2^2)\, \varkappa'\, ds$. Es wird nach partieller Integration wegen der Periodizität der Funktionen $x_i(s)$, $\xi_i(s)$, $\eta_i(s)$:

$$\oint_C (x_1^2 + x_2^2)\, \varkappa'\, ds = -2 \oint_C (x_1\, \xi_1 + x_2\, \xi_2)\, \varkappa\, ds.$$

Die Vektoren ξ_i und η_i stehen aber aufeinander senkrecht; es ist also

$$\xi_1\, \eta_1 + \xi_2\, \eta_2 = 0,$$

$$\oint_C (x_1^2 + x_2^2)\, \varkappa'\, ds = 2 \oint_C (x_1\, \eta_1' + x_2\, \eta_2')\, ds = -2 \oint_C (\xi_1\, \eta_1 + \xi_2\, \eta_2)\, ds,$$

d. h.

$$\oint_C (x_1^2 + x_2^2)\, \varkappa'\, ds = 0. \qquad (6)$$

Die Identitäten (3), (5) und (6) beweisen aber eben die Gleichung (2).

Bedeute nun

$$A\,(x_1^2 + x_2^2) + a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_0 = 0$$

den Kreis durch die Scheitelpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-2}$. Wir wollen jetzt annehmen, daß $\varkappa'(s)$ nur in den Punkten P_i sein Vorzeichen ändert. Dann folgt aber, daß der Ausdruck

$$[A\,(x_1^2 + x_2^2) + a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_0]\, \varkappa'$$

beim Durchlaufen unserer Kurve C sein Vorzeichen stets behält; das Integral (2) könnte somit nicht verschwinden. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $\varkappa'(s)$ außer den Punkten P_i $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$ noch in einem anderen Punkt sein Vorzeichen ändern muß. Das gibt einen neuen Scheitelpunkt. Wegen der Geschlossenheit treten aber Scheitelpunkte immer paarweise auf. Die Mindestzahl der Scheitelpunkte ist also $2n$, w. z. b. w.

Die Gleichung (2) ist die Erweiterung der Identität:

$$\oint_C (a_0 + a_1\, x_1 + a_2\, x_2)\, \varkappa'\, ds = 0, \qquad (7)$$

mit welcher *W. Blaschke* den Vierscheitelsatz bewiesen hat. /Vgl. [2], Gleichung (89a)/. Der Grundgedanke unseres Beweises ist ebenfalls derselbe; die Gleichung (2) ermöglicht aber eine Erweiterung des Vierscheitelsatzes, denn (2) enthält auch (7). Dies kommt in Satz 1 zum Ausdruck. Im nächsten § werden wir zeigen, daß man diese Betrachtungen auch auf die geschlossenen Raumkurven übertragen kann.

§ 2. Der dreidimensionale Fall.

Bedeute

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

eine geschlossene Raumkurve, und

$$\varphi(s) = \varphi(\varkappa(s), \varkappa'(s), \ldots, \tau(s), \tau'(s), \ldots)$$

eine Funktion des Bogenparameters: s, die mindestens dreimal stetig differentierbar ist, und für die

$$\oint_C \left\{\varphi + \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa\varphi}{\tau}\right)'\right]'\right\} ds = 0 \tag{9}$$

besteht. /$\varkappa$, τ sind Krümmung bzw. Torsion von (8)/. Wir beweisen den Satz:

Satz 2. Hat die Invariante

$$\mathfrak{C}(s) = \varphi' + \frac{\varkappa}{\tau}\left(\frac{\varkappa\varphi}{\tau}\right)' + \left\{\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa\varphi}{\tau}\right)'\right]'\right\}' \tag{10}$$

längs der geschlossenen Kurve (8) *in den Punkten* $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-2}$ *Extremwerte, und liegen die Punkte* P_i *auf einer Kugelfläche, die die Kurve* (8) *in keinen anderen Punkten trifft, und ist endlich* $d^2\mathfrak{C} / ds^2 \neq 0$ *in den Punkten, in denen* $d\mathfrak{C} / ds = 0$ *besteht, dann besitzt die Kurve* (8) *noch zwei weitere Punkte, in denen* $\mathfrak{C}(s)$ *einen Extremwert hat.*

Beweis: Erst werden wir die Identität

$$\oint_C (A \Sigma x_i^2 + \Sigma a_i x_i + a_0)\, \mathfrak{C}'\, ds = 0 \tag{11}$$

beweisen, wo A und a_i Konstanten sind. Das Zeichen Σ soll immer die Summation von 1 bis 3 bedeuten.

Wegen der Geschlossenheit der Kurve C, sind die Funktionen x_i, $\mathfrak{C}$ nebst ihren Ableitungen periodisch. Bezeichnen wir durch $\xi_i = x_i'$ η_i, ζ_i die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins von C, so lauten die Frentformeln:

$$\xi_i' = \varkappa\, \eta_i \tag{12a}$$

$$\eta_i' = -\varkappa\, \xi_i + \tau\, \zeta_i \tag{12b}$$

$$\zeta_i' = -\tau\, \eta_i. \tag{12c}$$

Wegen der Periodizität von $\mathfrak{C}$ hat man

$$\oint_C a_0\, \mathfrak{C}'\, ds = 0. \tag{13}$$

Um (11) zu beweisen, genügt

$$\oint_C \mathfrak{C}\, \xi_i\, ds = 0 \tag{14}$$

und

$$\oint_C \mathfrak{C}\, \Sigma\, x_i\, \xi_i\, ds = 0 \tag{15}$$

zu erweisen; denn aus (11) bekommt man nach partieller Integration:

$$\oint_C (A\, \Sigma\, x_i^2 + \Sigma\, a_i\, x_i + a_0)\, \mathfrak{C}'\, ds = -\oint_C (2\, A\, \Sigma\, x_i\, \xi_i + \Sigma\, a_i\, \xi_i)\, \mathfrak{C}\, ds. \tag{16}$$

Nach partiellen Integrationen und in Hinsicht auf die Gleichungen (12) wird

$$\oint_C \varphi'\, \xi_i\, ds = -\oint_C \varphi\, \xi_i'\, ds = -\oint_C \varphi\, \varkappa\, \eta_i\, ds = \oint \frac{\varkappa\, \varphi}{\tau}\, \zeta_i'\, ds =$$

$$= -\oint_C \left(\frac{\varkappa\, \varphi}{\tau}\right)' \zeta_i\, ds = -\oint_C \left(\frac{\varkappa\, \varphi}{\tau}\right)' \left(\frac{\varkappa}{\tau}\, \xi_i + \frac{1}{\tau}\, \eta_i'\right) ds,$$

also

$$\oint_C \left[\varphi' + \frac{\varkappa}{\tau}\left(\frac{\varkappa\, \varphi}{\tau}\right)'\right] \xi_i\, ds = -\oint_C \frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa\, \varphi}{\tau}\right)' \eta_i'\, ds =$$

$$= \oint_C \left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa\, \varphi}{\tau}\right)'\right]' \eta_i\, ds = \oint_C \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa\, \varphi}{\tau}\right)'\right]' \xi_i'\, ds =$$

$$= -\oint_C \left\{\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa\, \varphi}{\tau}\right)'\right]'\right\}' \xi_i\, ds.$$

Diese Gleichung gibt nach (10) eben die Identität (14).

Wir berechnen jetzt den Ausdruck:

$$\oint_C \Sigma\, x_i\, \xi_i\, ds.$$

Beachten wir die Identitäten

$$\Sigma\, \xi_i^2 = 1,\ \Sigma\, \xi_i\, \eta_i = \Sigma\, \xi_i\, \zeta_i = \Sigma\, \eta_i\, \zeta_i = 0,\ \xi_i = x_i',$$

dann bekommt man nach partiellen Integrationen in Hinsicht auf die Gleichungen (12):

$$\oint_C \varphi' \Sigma x_i \xi_i \, ds = -\oint_C \varphi \Sigma x_i \xi_i' \, ds - \oint_C \varphi \, ds.$$

Also es wird:

$$\oint_C \varphi' \Sigma x_i \xi_i \, ds + \oint_C \varphi \, ds = -\oint_C \varphi \Sigma x_i \xi_i' \, ds =$$

$$= -\oint_C \varkappa \varphi \Sigma x_i \eta_i \, ds = \oint_C \frac{\varkappa \varphi}{\tau} \Sigma x_i \zeta_i' \, ds =$$

$$= -\oint_C \left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)' \Sigma x_i \zeta_i \, ds = -\oint_C \left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)' \Sigma x_i \left(\frac{\varkappa}{\tau} \xi_i + \frac{1}{\tau} \eta_i'\right) ds.$$

Das gibt die Gleichung, wenn wir die $\Sigma x_i \xi_i$ enthaltenden Glieder wieder auf die linke Seite bringen:

$$\oint_C \left[\varphi' + \frac{\varkappa}{\tau}\left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)'\right] \Sigma x_i \xi_i \, ds + \oint_C \varphi \, ds = -\oint_C \frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)' \Sigma x_i \eta_i' \, ds =$$

$$= \oint_C \left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)'\right]' \Sigma x_i \eta_i \, ds = \oint_C \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)'\right]' \Sigma x_i \xi_i' \, ds =$$

$$= -\oint_C \left\{\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)'\right]'\right\}' \Sigma x_i \xi_i \, ds - \oint_C \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)'\right]' ds.$$

Nach (10) und (9) wird also

$$\oint_C \mathfrak{S} \Sigma x_i \xi_i \, ds = -\oint_C \left\{\varphi + \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{\varkappa \varphi}{\tau}\right)'\right]'\right\} ds = 0,$$

womit auch (15) bewiesen ist. Nach den Gleichungen (13)—(16) folgt, wie schon erwähnt wurde, die Gleichung (11).

Jetzt können wir weiter ebenso verfahren, wie im zweidimensionalen Fall. Bedeute

$$A \Sigma x_i^2 + \Sigma a_i x_i + a_0 = 0$$

die Kugelfläche, die die Punkte P_i enthält. In den Punkten P_i ist $\mathfrak{S}'(s) = 0$, und wegen $\mathfrak{S}''(s) \neq 0$ wechselt $\mathfrak{S}'(s)$ in diesen Punkten sein Vorzeichen. Wäre nun in anderen Punkten $\mathfrak{S}'(s) \neq 0$, dann hätte der Ausdruck

$$(A \Sigma x_i^2 + \Sigma a_i x_i + a_0) \mathfrak{S}'$$

immer dasselbe Vorzeichen; die Gleichung (11) könnte also nicht bestehen. Das beweist aber eben den Satz 2.

Es sei noch bemerkt, daß die Invariante $\mathfrak{C}(s)$ nur für die Raumkurven charakteristisch ist und durch (10) für ebene Kurven nicht definiert werden kann; denn für ebene Kurven ist $\tau(s) = 0$.

§ 3. Besondere Fälle.

In diesem § wollen wir die Invariante $\mathfrak{C}(s)$ für die durch die Gleichung

$$\varkappa(s) = c\,\tau^r(s) \qquad (r \neq 1) \tag{17}$$

und dann, für die durch

$$\varkappa(s) = \text{Konstante} \tag{18}$$

charakterisierten Kurven näher untersuchen. Wir verweisen auf das Beispiel I. von [3], S. 512.

Besteht für eine Kurve die Bedingungsgleichung (17) und wählt man für $\varphi(s)$ die Funktion:

$$\varphi = \tau^{1-r},$$

die wegen $r \neq 1$ nicht eine Konstante ist, so wird nach (10):

$$\mathfrak{C}(s) = \frac{d}{ds}\,\tau^{1-r} = (1-r)\,\frac{\tau'}{\tau^r}.$$

/Dies ist übrigens das in [3] behandelte Beispiel, angewandt auf den Fall $\varkappa = c\,\tau^r$/. Durchläuft der Punkt P die Kurve mit der Geschwindigkeit $ds/dt = 1$, so bedeutet $\tau(s)$ die Winkelgeschwindigkeit und $\tau'(s)$ die Winkelbeschleunigung des Binormalenvektors ζ_i. $\mathfrak{C}(s)$ steht also mit diesen beiden kinematischen Invarianten in Zusammenhang. Die Bedingung (9) nimmt die einfache Gestalt:

$$\oint_C \tau^{1-r}\,ds = 0, \tag{19}$$

die erfüllt ist, wenn z. B. τ^{1-r} einer Sinusfunktion ähnlich ist. Für $r = \frac{1}{2}$ wird:

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\tau'}{\tau^{1/2}} = \frac{1}{2c^{-1}}\,\frac{\tau'}{\varkappa}$$

und wegen $\tau' = 2c^{-2}\varkappa\varkappa'$ wird:

$$\mathfrak{C}(s) = c^{-1}\varkappa'(s).$$

$c\,\mathfrak{C}(s)$ ist also die Winkelbeschleunigung des Tangentenvektors. Die Gleichung (19) ist aber für diesen einfachen Fall im allgemeinen nicht erfüllbar; somit bestehen hier nur die Sätze des Artikels [3].

Für eine durch (18) charakterisierte Kurve wähle man

$$\varphi(s) = \gamma(s) \frac{\tau(s)}{\varkappa(s)}$$

wo

$$\gamma(s) = \int_0^s \tau(s)\, ds$$

bedeutet. Die Invariante

$$\Theta(s) = \operatorname{arc\,cotg} \frac{\tau(s)}{\varkappa(s)}$$

hängt mit der Richtung der Erzeugenden der rektifizierenden Fläche zusammen. /Vgl. [3]/. Für $\mathfrak{C}(s)$ bekommt man nach (10):

$$\mathfrak{C}(s) = \frac{d}{ds}(\gamma(s) \operatorname{cotg} \Theta(s)) + \varkappa$$

Wegen (18) wird $\mathfrak{C}'(s)$ die einfache Gestalt:

$$\mathfrak{C}'(s) = \frac{d^{\text{II}}}{ds^2}(\gamma(s) \operatorname{cotg} \Theta(s))$$

haben. Die Bedingung (9) ist jetzt ziemlich kompliziert. Läßt man diese Bedingung fallen, so kann nur behauptet werden, daß die Invariante längs einer geschlossenen Kurve vier Extremwerte besitzt, wenn nur $\gamma(s)$ periodisch ist. Dies folgt aus den Betrachtungen von [3]. Die Kurve C soll natürlich betreffs ihrer Punktepaare die in der Einleitung angegebene Eigenschaft haben. Die Periodizität von $\gamma(s)$ ist erfüllt, wenn die eine Hälfte der Kurve das Spiegelbild der anderen ist. Für das Spiegelbild hat nämlich $\tau(s)$ entgegengesetztes Vorzeichen.

Die Periodizität von $\tau(s)$ bzw. $\varphi(s)$ ist eine notwendige Voraussetzung; ohne diese hätten wir die Formel (10) nicht bestimmen können. Dies haben wir bei der partiellen Integration von $\varphi' \xi_i$ benutzt.

§ 4. Existenzprobleme der durch (17), (18) charakterisierten geschlossenen Kurven.

Es sei eine Kurve durch die Gleichungen:

$$x_i^* = x_i^*(u) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{20}$$

bestimmt. u bedeutet hier einen allgemeinen Parameter. Die Krümmung bzw. die Torsion von (20) wollen wir mit $\varkappa^*(u)$ bzw. $\tau^*(u)$ bezeichnen. Läßt sich die Kurve C mit der Krümmung bzw. Torsion $\varkappa$ bzw. τ der

gegebenen Kurve (20) so zuordnen, daß in entsprechenden Punkten die Tangenten parallel seien, so muß die Bedingungsgleichung

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{\varkappa^*}{\tau^*} \tag{21}$$

in den entsprechenden Punkten erfüllt sein. /Vgl. etwa das Lehrbuch [4], § 10./. Die Gleichung der Kurve C hat dann die Form:

$$x_i = \int \frac{\varkappa^*}{\varkappa} dx_i^*, \tag{22}$$

oder

$$x_i = \int \frac{\tau^*}{\tau} dx_i^*. \tag{23}$$

Für eine durch (17) charakterisierte Kurve wird nach (17) und (21):

$$\tau(u) = \left(\frac{\varkappa^*}{c\,\tau^*}\right)^{\frac{1}{r-1}} = c^{\frac{1}{1-r}} \left(\frac{\varkappa^*}{\tau^*}\right)^{\frac{1}{r-1}} \tag{24}$$

$$\varkappa(u) = c^{\frac{1}{1-r}} \left(\frac{\varkappa^*}{\tau^*}\right)^{\frac{r}{r-1}}. \tag{25}$$

Bemerkung: Für den Fall $r = 1$ ist das Gleichungssystem (17), (21) nicht auflösbar. Im Fall $r \neq 1$ geben (24), (25) die Lösung. $r = 1$ hat also eine Sonderstellung, die wir ausschließen wollen.

Nach (20), (22), (25) wird die Gleichung von C:

$$x_i(u) = c^{\frac{1}{r-1}} \int \varkappa^* \left(\frac{\varkappa^*}{\tau^*}\right)^{\frac{r}{1-r}} \frac{dx_i^*}{du} du \tag{26}$$

oder nach (20), (23), (24):

$$x_i(u) = c^{\frac{1}{r-1}} \int \tau^* \left(\frac{\varkappa^*}{\tau^*}\right)^{\frac{1}{1-r}} \frac{dx_i^*}{du} du. \tag{27}$$

Für die Geschlossenheit der Kurve C genügt, daß die Funktionen $x_i(u)$ dieselbe Periode haben. Dieser Fall tritt ein, wenn z. B. die Funktionen unter dem Integralzeichen die in der Abbildung angegebene Form haben. Die Flächen, die von

$$f_i^*(u) = \varkappa^* \left(\frac{\varkappa^*}{\tau^*}\right)^{\frac{r}{1-r}} \frac{dx_i^*}{du}$$

und von der u-Achse begrenzt sind, sind natürlich gleich. Vgl. die Abbildung, insbesondere die schraffierten Flächenstücke.

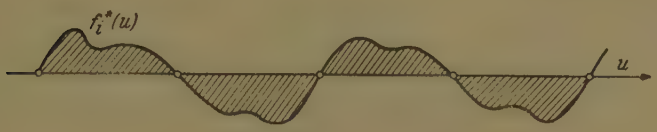

Abb. 1.

Um die Kurve $\varkappa = \text{konst.}$ in expliziter Form anzugeben, brauchen wir nur (22) in der Form:

$$x_i = \frac{1}{\varkappa} \int \varkappa^* \frac{dx_i^*}{du}\, du \tag{28}$$

zu schreiben. Um die Geschlossenheit dieser Kurve zu erweisen genügt, daß

$$\varkappa^*(u) \frac{dx_i^*}{du} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ebensolche Form haben, wie vorher die Funktionen $f_i^*(u)$.

§ 5. Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen.

Zum Schluß unserer Betrachtungen wollen wir in diesem § zeigen, daß die Grundidentität

$$\oint_C \mathfrak{C}\, \xi_i\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

auch auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden kann. Es besteht der Satz:

Satz 3. Es läßt sich für eine $(2n+1)$-dimensionale geschlossene Raumkurve C immer eine Invariante $\mathfrak{C}(s)$ durch die in § 2 angewandte Methode konstruieren, die die Gleichung

$$\oint_C \mathfrak{C}\, \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n+1) \tag{29}$$

identisch befriedigt, wenn $\underset{(1)}{\xi_i}$ der Tangentenvektor von C ist. (29) *besteht dann für jede geschlossene Raumkurve.*

Beweis: Wie schon vorher, erhalten wir auch im $(2n+1)$-dimensionalen Raum

$$\oint_{(C)} \varphi'\, \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = -\oint_C \varphi\, \underset{(1)}{\xi_i'}\, ds. \tag{30}$$

Beachten wir nun die Frenetformeln für die $(2n+1)$-dimensionalen Raumkurven:

$$\underset{(1)}{\xi_i'} = \varkappa_1 \underset{(2)}{\xi_i} \tag{31a}$$

$$\underset{(r)}{\xi_i'} = -\varkappa_{r-1} \underset{(r-1)}{\xi_i} + \varkappa_r \underset{(r+1)}{\xi_i} \qquad (r = 2, \ldots, 2n) \tag{31b}$$

$$\underset{(2n+1)}{\xi_i'} = -\varkappa_{2n} \underset{(2n)}{\xi_i}, \tag{31c}$$

wo $\varkappa_s$ die s-te Krümmung von C bedeutet. Nach (30) und (31a) wird:

$$\oint_C \varphi' \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = -\oint_C \varkappa_1 \varphi \underset{(2)}{\xi_i}\, ds$$

und nach (31b) für $r = 3$ wird:

$$\oint_C \varphi' \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = \oint_C \frac{\varkappa_1 \varphi}{\varkappa_2} \underset{(3)}{\xi_i'}\, ds - \oint_C \frac{\varkappa_1 \varkappa_3 \varphi}{\varkappa_2} \underset{(4)}{\xi_i}\, ds.$$

Substituieren wir jetzt $\underset{(4)}{\xi_i}$ durch die Gleichung:

$$\underset{(4)}{\xi_i} = -\frac{1}{\varkappa_4} \underset{(5)}{\xi_i'} + \frac{\varkappa_5}{\varkappa_4} \underset{(6)}{\xi_i}.$$

/Diese Gleichung erhält man nach (31b), wenn $r = 5$ genommen wird/. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir wegen (31c) einen Ausdruck von der Form:

$$\oint_C \varphi' \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = \sum_{r=1}^{n} \oint_C A_{2r+1} \underset{(2r+1)}{\xi_i'}\, ds, \tag{32}$$

wo die A_{2r+1} Funktionen von $\varkappa$, τ und φ sind. Nach der Grundidee der in [3] und in § 2 angewandten Methode sollen wir auf der rechten Seite von (32) nach partieller Integration $\underset{(1)}{\xi_i}$ reproduzieren. Dies kann man leicht erreichen. Wir zeigen das für das allgemeine Glied

$$\oint_C A_{2s+1} \underset{(2s+1)}{\xi_i'}\, ds.$$

Nach partieller Integration und unter Beachtung der Identität /vgl. die Gleichung (31b)/:

$$\underset{(2s)}{\xi_i'} = -\varkappa_{2s-1} \underset{(2s-1)}{\xi_i} + \varkappa_{2s} \underset{(2s+1)}{\xi_i} \qquad (s \leqq n)$$

wird:

$$\oint_C A_{2s+1} \underset{(2s+1)}{\xi_i'}\, ds = -\oint_C \frac{A'_{2s+1}}{\varkappa_{2s}} \underset{(2s)}{\xi_i'}\, ds - \oint_C \frac{\varkappa_{2s-1}}{\varkappa_{2s}} A'_{2s+1} \underset{(2s-1)}{\xi_i}\, ds =$$

$$= \oint_C \left(\frac{A'_{2s+1}}{\varkappa_{2s}}\right)' \underset{(2s)}{\xi_i}\, ds - \oint_C \frac{\varkappa_{2s-1}}{\varkappa_{2s}} A'_{2s+1} \underset{(2s-1)}{\xi_i}\, ds.$$

Damit haben wir erreicht, daß statt des Vektors $\underset{(2s+1)}{\xi_i}$ die Vektoren $\underset{(2s)}{\xi_i}$ bzw. $\underset{(2s-1)}{\xi_i}$ aufgetreten sind. Die Vektoren $\underset{(2s)}{\xi_i}$ bzw. $\underset{(2s-1)}{\xi_i}$ kann man mit Hilfe der Frenetformeln wieder durch die Vektoren mit kleineren Zeigern ausdrücken. Wir verfahren auf diese Weise weiter, bis endlich die Form:

$$\oint_C A_{2s+1} \underset{(2s+1)}{\xi_i'}\, ds = \oint_C B_{2s+1} \underset{(1)}{\xi_i}\, ds$$

erreicht wird. Damit haben wir aber nachgewiesen, daß (32) auf die Form

$$\oint_C [\varphi' - \sum_{r=1}^{n} B_{2r+1}] \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = 0$$

gebracht werden kann, w. z. b. w.

Die Invariante

$$\mathfrak{C}(s) = \varphi' - \sum_{r=1}^{n} B_{2r+1}$$

ist ziemlich kompliziert, auch schon im dreidimensionalen Fall, doch kann man manchmal, wie wir das auch gezeigt haben, durch ein geeignet gewähltes φ, für $\mathfrak{C}(s)$ einfache Ausdrücke erhalten. Aus diesen Betrachtungen folgt auch, daß (29) *für jede Raumkurve erfüllt ist.*

Ist die Dimensionszahl eine gerade Zahl, und größer als zwei, dann erhält man statt (31c):

$$\underset{(2n)}{\xi_i'} = -\varkappa_{2n-1} \underset{(2n-1)}{\xi_i}$$

und statt (32):

$$\oint_C \varphi' \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = \sum_{r=2}^{n} \oint_C A_{2r-1} \underset{(2r-1)}{\xi_i'}\, ds + \oint_C A_{2n} \underset{(2n)}{\xi_i}\, ds.$$

Der Vektor $\underset{(2n)}{\xi_i}$ kommt aber jetzt in den Frenetformeln nur einmal vor, somit können wir im letzten Glied $\underset{(1)}{\xi_i}$ nicht wieder reproduzieren.

Wenn man auf eine etwas abweichende Weise verfährt, kann man auch in diesem Fall, also für die $2n$-dimensionalen Kurven die Invariante $\mathfrak{C}(s)$ konstruieren. Dies wollen wir bezüglich einer vierdimensionalen Raumkurve zeigen. Die Frenetformeln sind jetzt:

$$\underset{(1)}{\xi_i'} = \varkappa_1 \underset{(2)}{\xi_i} \tag{33a}$$

$$\underset{(2)}{\xi_i'} = -\varkappa_1 \underset{(1)}{\xi_i} + \varkappa_2 \underset{(3)}{\xi_i} \tag{33b}$$

$$\underset{(3)}{\xi_i'} = -\varkappa_2 \underset{(2)}{\xi_i} + \varkappa_3 \underset{(4)}{\xi_i} \tag{33c}$$

$$\underset{(4)}{\xi_i'} = -\varkappa_3 \underset{(3)}{\xi_i}. \tag{33d}$$

Es wird nach (33b):

$$\oint_C \varphi \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = -\oint_C \frac{\varphi}{\varkappa_1} \underset{(2)}{\xi_i'}\, ds + \oint_C \frac{\varkappa_2 \varphi}{\varkappa_1} \underset{(3)}{\xi_i}\, ds.$$

Die Abweichung von den ungeraden Dimensionen besteht also darin, daß man die Rechnung hier mit dem zweiten Glied der Frenetformeln beginnt. Nach particller Integration bei Beachtung von (33a) und (33d) wird:

$$\oint_C \varphi \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = \oint_C \left(\frac{\varphi}{\varkappa_1}\right)' \frac{1}{\varkappa_1} \underset{(1)}{\xi_i'}\, ds - \oint_C \frac{\varkappa_2 \varphi}{\varkappa_1 \varkappa_3} \underset{(4)}{\xi_i}\, ds =$$

$$= -\oint_C \left[\frac{1}{\varkappa_1}\left(\frac{\varphi}{\varkappa_1}\right)'\right]' \underset{(1)}{\xi_i}\, ds + \oint_C \left(\frac{\varkappa_2 \varphi}{\varkappa_1 \varkappa_3}\right)' \underset{(4)}{\xi_i}\, ds.$$

Substituiert man $\underset{(4)}{\xi_i}$ aus (33c), so wird nach weiteren partiellen Integrationen unter Beachtung von (33a) und (33b):

$$\oint_C \mathfrak{C}(s) \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = 0, \tag{34}$$

wo

$$\mathfrak{C}(s) = \varphi + \left[\frac{1}{\varkappa_1}\left(\frac{\varphi}{\varkappa_1}\right)'\right]' + \left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1 \varkappa_3}\left(\frac{\varkappa_2 \varphi}{\varkappa_1 \varkappa_3}\right)'\right]' + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\left[\frac{1}{\varkappa_3}\left(\frac{\varkappa_2 \varphi}{\varkappa_1 \varkappa_3}\right)'\right]' +$$

$$+ \left\{\frac{1}{\varkappa_1}\left\{\frac{1}{\varkappa_2}\left[\frac{1}{\varkappa_3}\left(\frac{\varkappa_2 \varphi}{\varkappa_1 \varkappa_3}\right)'\right]'\right\}'\right\}'$$

bedeutet. Man kann sich leicht überzeugen, daß mit dieser Methode nur bei gerader Dimensionszahl eine Identität von der Form (34) erreicht werden kann, die für jede geschlossenen Raumkurven besteht. Wie beim Satz 3 kann man leicht zeigen, daß diese Methode für eine beliebige $2n$-dimensionale Kurve anwendbar ist. Damit erhalten wir den Satz:

Satz 4. Es existiert für eine $2n$-dimensionale Raumkurve eine Invariante $\mathfrak{C}(s)$ auf die Weise, daß (34) *besteht.* (34) *besteht dann für jede geschlossenen Raumkurven.*

Die Sätze 3 und 4 drücken aus, daß der Vierscheitelsatz *mit der angegebenen Methode* auf beliebige Dimensionen erweitert werden kann. Die Gleichung

$$\oint_C \mathfrak{C}' \underset{}{x_i}\, ds = -\oint_C \mathfrak{C} \underset{(1)}{\xi_i}\, ds = 0$$

sichert nämlich wie schon in (3) und in (2) gezeigt wurde für $\mathfrak{C}'(s)$ mindestens vier Nullstellen. /In [1] und in [2] ist $\mathfrak{C} = \varkappa$/. Diese Invarianten kann man also mit dem in diesem § gegebenen Methoden immer konstruieren.

Literatur.

[1] *W. Blaschke*, Die Minimalzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 36 (1913), S. 220—222.

[2] *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Bd. I. Dritte Auflage. Verlag von Julius Springer, Berlin (1930).

[3] *A. Moór*, Erweiterung des Vierscheitelsatzes auf dreidimensionale Kurven. Duke Math. Journal 18 (1951), S. 509—516.

[4] *V. Kommerell* und *K. Kommerell*, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Bd. I. Vierte Auflage. Walter de Gruyter u. Co., Berlin und Leipzig (1931).

Buchbesprechungen.

Naturwissenschaft und Humanismus. (Die heutige Physik.) Von *E. Schrödinger*. Mit 111 Textabb., 88 S. Wien: F. Deuticke. 1951. S 18.—.

In diesen vier Vorlesungen setzt sich der Verf. zunächst mit der geistigen Bedeutung der Naturwissenschaft für das Leben auseinander. Er lehnt den Utilitarismus, welcher die Bedeutung der Naturwissenschaften einzig und allein in ihrer Anwendung auf Technik und Industrie sieht, mit scharfen und ironischen Worten ab. Schrödinger drückt seine Einstellung dahingehend aus, daß das Ziel der Naturwissenschaft, wie jeder Wissenschaft überhaupt sich in den Worten „Erkenne Dich selbst" darstellt.

Der größere Teil der Vorlesungen beschäftigt sich mit der philosophischen Situation, welche durch die Quantenphysik geschaffen wurde (Kausualitätsprinzip, Subjekt und Objekt, Kontinuumsproblem, Willensfreiheit). Der Verf. hebt mit Recht hervor, daß die Quantentheorie zum metaphysischen Problem der Willensfreiheit nichts beitragen kann. Recht interessant für den Mathematiker sind die Ausführungen über das mathematische Kontinuum; sie sind es deshalb, weil gerade die Physiker so schwer davon zu überzeugen sind, daß das mathematische Kontinuum nicht so harmlos ist, wie angenommen zu werden pflegt und daß die Vorsicht des Mathematikers keine überflüssige Spitzfindigkeit darstellt. Hier haben nun die Mathematiker an Schrödinger einen wertvollen Bundesgenossen gefunden (wenn man auch an seinen Ausführungen manches bekritteln könnte).

Das Buch ist in dem gewohnt lebendigen Stil geschrieben, so daß das Lesen dieser Vorlesungen ein wirkliches Vergnügen ist.

E. Hlawka, Wien

Aus der Werkstatt des Denkens. Von *R. Grammel*. („Deutsches Museum": Heft 3.) 28 S. München: R. Oldenbourg. 1951. DM 1.—.

Das ohne Vorkenntnisse leicht lesbare, flüssig geschriebene Büchlein enthält eine Reihe origineller Aphorismen über richtiges und falsches Denken, die mit vielen passend gewählten Zitaten gewürzt sind. Der Verfasser unterstützt seine Behauptungen durch zahlreiche Beispiele der Entwicklung der Mathematik und Naturwissenschaften. Das letzte Kapitel des Heftes umfaßt eine anregende astronomische Plauderei, bei der mancher Leser bedauern dürfte, daß sie nicht weiter führt.

J. F. Lewandowski, Wien

Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics. Von *H. B. Curry*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VII, 75 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1951. hfl. 7.50.

Die lesenswerten Ausführungen behandeln Grundlagenfragen der Mathematik, insbesondere das Problem des Wahrheitsbegriffes dieser Disziplin. Die Ansichten des Verf. werden — wie es scheint — die meisten Mathematiker akzeptieren.

Hinsichtlich der Richtigkeit mathematischer Aussagen werden drei Standpunkte angeführt. Der Realismus, welcher die Richtigkeit der Sätze an der Außenwelt prüft, der Idealismus und ein hier als Formalismus bezeichneter Standpunkt. Die realistische Auffassung entspricht genetisch den Anfangsstadien der Mathematik und wird der fortschreitenden Abstraktion nicht gerecht. Verf. lehnt auch den idealistischen Standpunkt ab, worunter er auch die Position des modernen Intuitionismus versteht. Um die Berechtigung der dritten Auffassung klar zu machen, beschäftigt sich der Autor ausführlich mit einer Reihe von Problemen, die mit der Definition und Struktur eines formalen Systems zusammenhängen, mit Fragen der Syntax und Metatheorie — übrigens nicht immer auf dem Boden der Auffassungen von Carnap. Die Ausführungen gipfeln in der Definition: Die Mathematik ist die Wissenschaft von den formalen Systemen. Es wäre aber verfehlt, des Autors Meinungen mit denen Hilberts zu identifizieren. Nach dem Verf. ist ein formales System kein Spiel, sondern eine Sammlung von Aussagen und dieser Begriff wird im Sinne der „üblichen" Bedeutung verstanden. Die Ansichten stehen etwa „zwischen Hilbert und Brouwer" und lassen sich noch am ehesten mit Anschauungen vergleichen, die einmal Gentzen geäußert hat. Sie werden im Laufe des Textes recht treffend als empirischer Formalismus gekennzeichnet. Es sei erwähnt, daß der Verf. die Notwendigkeit eines ständigen Kontaktes der Mathematik mit anderen Wissenschaften betont. Diese — besonders heute — wichtige Forderung, ergibt sich allerdings hier fast von selbst, da empirische Fakten über die Annehmbarkeit formaler Systeme entscheiden sollen in gewissem Gegensatze zum Hilbertschen Kriterium der formalen Widerspruchslosigkeit. Tatsächlich illustriert des Verf. Hinweis auf die Analysis — für deren Gesamtgebiet ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis (derzeit) nicht existiert, deren Anerkennung aber durch ihre Brauchbarkeit gesichert erscheint — diese Ansicht. Schließlich folgt noch eine Auseinandersetzung über das Verhältnis zwischen Logik und Mathematik, wobei der Verf. dem Standpunkt des modernen Intuitionismus nahe kommt. Es sei jedoch ausdrücklich hervorgehoben, daß den hier niedergelegten Ansichten eine durchaus selbständige Stellung zukommt, Berührungspunkte mit anderen Anschauungen sind selbstverständlich, aber keineswegs Ausgangspunkt. Auf die sehr klare Darstellung sei hingewiesen.

L. Schmetterer, Wien

The Propositional Logic of Boethius. Von *K. Dürr.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) X, 79 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1951. hfl. 12.—.

Das vorliegende Buch behandelt die Logik des an der Wende zweier Zeiten stehenden Gelehrten Boethius und schließt somit in natürlicher Weise an die Ausführungen Bochenskis in derselben Sammlung an, so daß die beiden Werke zusammen eine moderne und im Hinblick auf den Stand der Forschung auch vollständige Übersicht über den Stand der antiken Logik bis in das beginnende Mittelalter hinein darstellen dürften. Einige grundlegende Gedanken des Verf. findet man schon in seinem Artikel „Aussagenlogik im Mittelalter" (Erkenntnis 7). Die im Buch angestellten Untersuchungen beziehen sich auf die beiden Werke von Boethius: „de syllogismo hypothetico" und „Commentarii in Ciceronis Topica". Diese beiden haben ja entscheidenden Einfluß auf die scholastische Logik gehabt, und zwar, worauf Verf. hinweist, dieses auf die Schule von St. Gallen, jenes auf Abaelard. Interessant sind die Darlegungen über die möglichen Vorbilder des Boethius, der übrigens der elfte Vorsteher der peripatetischen Schule (seit Aristoteles) war. Der Verf. kommt zur Schlußfolgerung, daß die

stoische Aussagenlogik Boethius nicht als Quelle gedient hat. Zur Wiedergabe der Studien des Boethius bedient sich der Verf. der klammerfreien Symbolik von Lukasiewicz. Zur Interpretation der Schlußschemen werden sowohl die übliche Implikation als auch die „strict implication" von Lewis herangezogen. Da kürzlich R. van den Driessche den Versuch gemacht hat, leicht zu falsifizierende Formeln des Boethius durch gelegentliche Deutung des „si" als Äquivalenzzeichen und des „cum" als Konjunktionszeichen zu retten, sei noch erwähnt, daß der Verf. — wie es scheint in natürlicherer Weise — „si" und „cum" stets als Implikationszeichen im einen oder anderen Sinne auffaßt. Die Untersuchungen der Aussagenlogik und der Schlußschemen aus dem „de syllogismo hypothetico" und den dort zu findenden Ansätzen zu einer Modalitätenlogik ist der größere Teil des Buches gewidmet. Der Übersetzer N. Martin hat einen Anhang hinzugefügt, welcher in einer Reihe von Fällen die Frage klärt, ob gewisse Formeln als richtig angesehen werden können, wenn die Implikation in der Auffassung von Lewis verstanden wird.

L. Schmetterer, Wien

Ancient Formal Logic. Von *I. M. Bochenski.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VI, 122 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1951.

Ein sehr bedeutender Kenner der Logik hat einmal über eine wichtige Abhandlung des Verf. über die Logik des Theophrast gesagt: „... eine profunde Kenntnis der Aristotelischen Logik ... in Verbindung mit einer Aristoteles-Interpretation, die von der Präzisionstechnik der mathematisierten Logik Gebrauch macht, ist ..., nur in ungewöhnlichen Glücksfällen anzutreffen. Es ist unzweifelhaft, daß ein solcher Glücksfall hier vorliegt." Das vorliegende Buch könnte man dadurch kennzeichnen, daß man diese Ansicht auf das ganze Werk überträgt. Tatsächlich verbindet der Verf. eine gründliche Kenntnis der allgemein philosophischen-logischen Situation der hellenischen Welt mit einer sicheren Beherrschung des modernen Logikkalküls. Die Heranziehung der mathematischen Logik für die Darstellung des Stoffes durch den Verf. — der übrigens ein Schüler des polnischen Logikers Lukasiewicz ist — bringt den Gegenstand auch dem nach der mathematisch-logischen Seite hin interessierten nahe. Es wird die Symbolik von Russel verwendet. Es versteht sich von selbst, daß ein Gutteil der Untersuchungen den Werken des Aristoteles gewidmet ist. Ebenso wurde der stoischen Schule größere Aufmerksamkeit geschenkt. Man kann sich aber z. B. auch über den Zustand der Logik vor Aristoteles unterrichten, ferner wird der wichtigste Schüler des großen griechischen Denkers Theophrast kurz gewürdigt und schließlich wird auch auf die Zeit des Niederganges der antiken Logik nach Chrysippus bis Boethius eingegangen. Die umfangreiche Bibliographie gibt eine Vorstellung von der geleisteten Arbeit, die der Mathematiker kaum in allem zu würdigen vermag. Es ist selbstverständlich, daß dieses Buch wesentlich dazu beitragen wird, die griechischen Arbeiten in neuem Licht zu sehen. Es muß jedem am Gegenstand Interessierten wärmstens empfohlen werden.

L. Schmetterer, Wien

An Essay in Modal Logic. Von *G. H. von Wright.* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VI, 90 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1951. hfl. 9.—.

Verf. bemerkt einleitend, daß zwischen dem Gebrauch der Quantoren und Modalitäten formale Analogie herrscht und dieser Gedanke hier ausgenützt

wird. Es werden vier Gruppen von Modalitäten betrachtet: Alethische (notwendig, möglich, wahrscheinlich [contingent], unmöglich), epistemische (verifiziert, unentschieden, falsifiziert), deontische (obligatorisch, erlaubt, indifferent, verboten), existentielle (universell, existierend, leer). Hinzu kommt, ob sie de dicto oder de re ausgesagt werden, d. h. hinsichtlich einer Aussage oder eines Dinges. Der ersten Gruppe de dicto wird die größte Aufmerksamkeit gewidmet. Anhangsweise anläßlich eines axiomatischen Aufbaues der alethischen Modalitätenlogik wird auch der Vergleich mit früheren Entwicklungen von Lewis und Langford durchgeführt. Die intensive Beschäftigung mit diesen Modalitäten ist auch historisch gerechtfertigt, da ja die Anfänge dieser Logik auf ein ehrwürdiges Alter zurückblicken. Der Verf. legt als undefinierte Modalität die Möglichkeit zugrunde. Die Definition der anderen gelingt dann mittels der Grundverknüpfungen des Aussagenkalküls. Man erhält das System M_1, wenn man nur solche Aussagenvariable und deren Verknüpfungen betrachtet, welche durch den Möglichkeitsoperator „gebunden" sind. In M_1 ist das Entscheidungsproblem lösbar, wie auch in anderen hier betrachteten Systemen. Das System M_1 wird zum System $M_1 + M_0$ erweitert, indem man zu M_1 das System der gewöhnlichen Aussagenlogik hinzufügt und diese verknüpft. Zieht man statt des Aussagenkalküls den Klassenkalkül heran, dann lassen sich für die alethischen Modalitäten de re analoge Systeme M_{1r} und $M_{1r} + M_{or}$ aufstellen. Auch bei der Besprechung der beiden folgenden Gruppen von Modis steht stets die Anwendung auf Aussagen (de dicto) im Vordergrunde. Als undefinierte Grundmodalität bei der Besprechung der epistemischen Modi wird „verifiziert" eingeführt. Dem Abschnitt über deontische Modalitäten liegt eine ausführliche Arbeit des Verf. in Mind. 60 (1951) zugrunde. Da es so scheint, als ob die neuen Jahrgänge, dieser Zeitschrift in Österreich unzugänglich seien, ist die, wenn auch gedrängte Veröffentlichung in dieser Form hier besonders begrüßenswert. Undefinierte Grundmodalität ist „erlaubt". Die existentiellen Modalitäten werden nur in Kombination mit anderen Gruppen behandelt. Zunächst das VE-System. Die Abkürzung deutet schon an, welche Ausdrücke einer Untersuchung unterworfen werden. Es handelt sich um Existenzaussagen mit vorgeschalteten epistemischen Modalitätsphrasen (es ist verifiziert, daß etwas rot ist). Die Anwendung der Modalitäten nur de dicto ist hier sinngemäß. Weiter wird das EV-System behandelt, wobei klar sein dürfte, was darunter verstanden werden soll. Hier ergibt sich naturgemäß die Verwendung der Modis de re. Schließlich wird das kombinierte $VE + EV$-System herangezogen. Nun werden die Untersuchungen früherer Kapitel wieder aufgenommen und speziell für den Fall der alethischen Modalitäten de dicto ein Kalkül zweiter Stufe entwickelt, d. h. ein M_2-System betrachtet, welches aus den Ausdrücken des M_1-Systems durch Vorschaltung des Möglichkeitsoperators entsteht. Auf diese Weise kann man zu Modalitäten höherer Stufe aufsteigen und diesen und weiteren Verallgemeinerungen ist der Rest der Ausführungen gewidmet, abgesehen von zwei Anhängen. Der Verf. macht übrigens auf den einleuchtenden Sachverhalt aufmerksam, daß man Kalküle höherer Stufe auch für die epistemischen, aber nicht für die deontischen und existentiellen Modalitäten aufstellen kann. So weit in kurzen Zügen die interessanten Untersuchungen des Autors. Es sei noch erwähnt, daß in derselben Sammlung eine weitere Monographie über Modalitäten Logik von Feys und Kinsey angekündigt ist, auf welche der Verf. auch im Vorwort bezug nimmt. Da es scheint, daß dieses Gebiet in der modernen Logik bisher etwas stiefmütterlich behandelt wurde, kann man wohl erwarten, daß die diesbezüglichen Publikationen in einem weiten Leserkreis Interesse finden werden.

L. Schmetterer, Wien

The Exact Sciences in Antiquity. Von *O. Neugebauer*. XVI, 191 S. Kopenhagen: E. Munksgaard. — Princeton: University Press. — Oxford: At the University Press. 1951. dKr. 42.—.

Das neue Werk des bekannten Verfassers ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die er Ende 1949 an der Cornell University gehalten hat und die den Zweck verfolgten, einem größeren Hörerkreis Einblick in die Frühgeschichte der Mathematik und Astronomie zu geben, wobei es besonders darauf ankam, das Quellenmaterial und die Forschungsmethoden darzulegen. So unterscheidet sich das Buch nicht unwesentlich von den bekannten „Vorlesungen" des Verfassers, ist aber insofern als eine wünschenswerte Ergänzung dieser anzusprechen, als sich hier das reiche und interessante Material zur Geschichte der Astronomie verarbeitet findet. Vor allem handelt es sich um Ephemeriden aus der Seleukidenzeit, die vor 70 Jahren durch Strassmaier auf Keilschrifttafeln im British Museum entdeckt und von Epping bearbeitet wurden. Kugler, Schaumberger und Neugebauer haben die Arbeiten Eppings fortgeführt und wir finden nun hier einen hochinteressanten Bericht über die Ergebnisse. Mit einfachen interpolatorischen Methoden haben die babylonischen Astronomen in den letzten drei Jahrhunderten vor Christus recht genaue Mondtafeln berechnet. Besonders interessant ist, daß sich dabei zwei wesentlich verschiedene Methoden unterscheiden lassen, indem einmal mit streckenweise konstanten, das andere Mal mit streckenweise linearen Funktionen operiert wird, und daß sich Spuren dieser — von der hellenistischen Astronomie längst überwundenen — primitiven Methoden noch bis gegen Ende des Mittelalters in astrologischen Texten nachweisen lassen.

Neben den Sachergebnissen zur Geschichte der Mathematik wird der Leser durch die Schilderung des Zustandes und der Schwierigkeiten der Gewinnung des Quellenmaterials gefesselt; im ganzen ergibt sich dabei ein recht trübes Bild, indem das Mißverhältnis zwischen der Masse der in Museen, aber auch noch im Boden vergrabenen — und teilweise verkommenden — Schätze und der Menge des wirklich verarbeiteten Materials, aber auch der Mangel an edierten Texten geschichtlich bedeutsamer Werke vom Verfasser sehr stark betont wird. Möge das lesenswerte Buch dazu beitragen, daß die internationalen Organisationsbestrebungen, die sich heute in der Wissenschaft energisch durchzusetzen beginnen, sich der lohnenden Aufgabe zuwenden, hier Wandel zu schaffen!

J. Radon, Wien

Arithmetik des Diophantes aus Alexandria. Aus dem Griechischen übertragen und erklärt von *A. Czwalina*. (Beiheft 1 zu den „Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg".) 148 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1952.

Da das Studium der Werke Diophants in der Originalsprache bestimmt nicht leicht sein dürfte, erfordert es doch vor allem ausgezeichnete Kenntnis des Griechischen, ist die vom Verfasser vorgenommene Übersetzung von hervorragendem Wert. Besonders dankbar muß man dem Autor für die in wohl sehr mühevoller Arbeit entstandenen Anmerkungen und Erläuterungen sein, durch die das Studium des Buches sehr erleichtert wird. Was die Arithmetik des Diophants betrifft, kann diese nicht nur vom historischen Standpunkt als interessant bezeichnet werden, sondern das Lesen dieses Buches dürfte auch für jeden Zahlentheoretiker äußerst fruchtbringend sein (lineare, quadratische, kubische Gleichungen etc.).

Dieses Buch wird somit entscheidend dazu beitragen, Diophants Werke zur allgemeinen Kenntnis zu bringen.

E. Höfinger, Wien

Linear Computations. Von *P. Dwyer.* 344 S. New York: J. Wiley & Sons. $ 6.50.

Das Buch beschäftigt sich vorwiegend mit der numerischen Auflösung von linearen Gleichungen. Hochschulvorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt. Die grundlegenden Methoden werden mittels elementarer Algebra dargestellt. Determinanten und Matrizen werden erst später eingeführt. Es wird erklärt, was man darunter versteht und wie man damit rechnet. Dies wird an mehreren Beispielen plausibel gemacht. Theorie tritt zurück. Beweise fehlen fast ganz. Im Vordergrund steht das praktische Rechnen, vor allem das Rechnen mit Rechenmaschinen. Auf Rechnen mit angenäherten Zahlen wird genauer eingegangen und es werden Fehlerabschätzungen gemacht. Da das Buch auf praktisches Rechnen eingestellt ist, so kann nur der Leser vollen Gewinn erzielen, der alle Regeln selbst erprobt und die zahlreichen Beispiele selbst rechnet. Groß ist die Zahl der wertvollen Winke, die der Verf. gibt. Das Buch ist sehr breit geschrieben und wendet sich in erster Linie an solche, die viel zu rechnen haben. Ein Kapitel gibt Anwendungen auf Statistik. Das Buch enthält zahlreiche Literaturangaben aus den letzten Jahren und ein ausführliches Sachregister.

N. Hofreiter, Wien

Aufgabensammlung zur höheren Algebra. Von *H. Hasse* und *W. Klobe.* Zweite Auflage. (Sammlung Göschen: Nr. 1082.) 181 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1952. DM 2.40.

Der Band enthält Aufgaben zu den beiden Bänden: „Höhere Algebra" I, II, von H. Hasse. Wenn auch die moderne, abstrakte Algebra in diesen beiden Bänden elegant und klar dargestellt wird, so wird den Studierenden doch wärmstens empfohlen, daneben noch Aufgaben zu rechnen, wodurch der Stoff besser verstanden wird und die überdies zum abstrakten Denken erziehen. Das wird durch den vorliegenden Übungsband vortrefflich erreicht. Die neue Auflage enthält einige Verbesserungen und Ergänzungen.

N. Hofreiter, Wien

Über das quadratische Reziprozitätsgesetz. Von *H. Brandt.* (Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 99, Heft 1.) 17 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1951. DM 1.90.

Der Verf. entwickelt eine neue Formulierung des Reziprozitätsgesetzes, die sich an die älteste von Euler stammende anschließt. In der neuen Formulierung erweist sich der Beweis des Reziprozitätsgesetzes am besten geeignet, der aus der Theorie der quadratischen Formen abgeleitet ist. An Hand von mehreren Beispielen wird gezeigt, wie einfach und zweckmäßig sich die Anwendung des Reziprozitätsgesetzes in der neuen Fassung gestaltet.

N. Hofreiter, Wien

Partial Differentiation. Von *R. P. Gillespie.* VIII, 107 S. Edinburgh und London: Oliver and Boyd. — New York: Interscience Publishers, Inc. 1951. Geb. 6 s. net.

Kurz gefaßt enthält das kleine Buch das Wichtigste über den im Titel angegebenen Gegenstand. Etwa 70 Beispiele geben dem Studierenden, für den es wohl in der Hauptsache gedacht ist, genügend Übungsmöglichkeit. Besonders

klar ist der Begriff des totalen Differentials herausgearbeitet, nämlich, daß die Größen $dx_1, \ldots, dx_n$ vollkommen unabhängige Variable sind, also nicht beliebig klein sein müssen. Man findet manches, was man auch in größeren Lehrbüchern nicht findet, z. B. ein anschauliches Kriterium für das Extremum einer Funktion $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$: Aus der Kurvenschar $f(x, y) = c$ jene zu finden, welche die Kurve $g(x, y) = 0$ berührt. Entsprechendes ist auch für den dreidimensionalen Fall angegeben.

E. Höfinger, Wien

The Lebesgue Integral. Von *J. C. Burkill.* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Herausgegeben von W. V. D. Hodge: Nr. 40.) VIII, 87 S. Cambridge: At the University Press. 1951. 12 s. 6 d. net.

Wollte man ein deutschsprachiges Lehrbuch über denselben Gegenstand nennen, welches ähnlichen Aufbau und analoge Zielsetzung hat, dürfte man wohl am besten auf Kamke verweisen. Um bei dem geringen Umfang doch eine in gewissem Sinne vollständige Darlegung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie für die Funktionen einer Veränderlichen zu geben, werden die mengentheoretischen Grundbegriffe nur im notwendigsten Umfang erläutert. Die Definition des mehrfachen Integrales wird gestreift, hauptsächlich im Hinblick auf den Satz von Fubini. Es sei erwähnt, daß auch eine Behandlung des Raumes L_p und das Lebesgue-Stieltjes-Integral Platz gefunden haben. Eine Reihe von Beispielen zu jedem Kapitel, welche vielfach am Schluß des Bandes gelöst sind, dienen nicht nur der Einübung sondern auch der Erweiterung und Abrundung des Textes, z. B. Egoroffs Theorem, die Definition des gebrochenen Integrals usw. Ein ausgezeichneter Behelf für den Lehrer und Studierenden!

L. Schmetterer, Wien

Unendliche Reihen. Von *H. Dörrie.* Mit 21 Abb, XI, 725 S. München: R. Oldenbourg. 1951. DM 58.—.

Ein oft originelles und sehr reichhaltiges Lehrbuch, welches auch auf die Anwendungen der Theorie sein Augenmerk richtet. Kurz sei der Inhalt gekennzeichnet: Ein besonderer Abschnitt ist einer Reihe wichtiger Ungleichungen der Analysis gewidmet. Das Riemannsche Integral ist ab ovo entwickelt und im Anschluß daran findet man Grundlegendes zur Funktionentheorie. Damit schließt der erste einleitende Teil. Der zweite Teil ist der Hauptteil und umfaßt den eigentlichen Gegenstand. Außer den üblichen Konvergenzkriterien für Reihen mit konstanten Gliedern findet man noch das erste in der Skala der logarithmischen Kriterien nach Raabe benannte. Die praktisch wichtigen Transformationen von Kummer, Euler und Markoff kommen vor. Es sei weiter auf den kurzen Abschnitt über Doppelreihen verwiesen, für welchen der Verf. eine hübsche Auswahl getroffen hat. Es folgen Potenzreihen und die elementaren Funktionen und dann die unendlichen Produkte. Hier nimmt der Verf. gleich Gelegenheit, um in die Jacobische Theorie der Thetas ein Stück einzudringen, und dann kommt die Besprechung der Gammafunktion bis zur Hankelschen Darstellung des Kehrwertes durch ein Schleifenintegral. Die nächsten Abschnitte bringen Wichtiges über Fourierreihen, Dirichletreihen und asymptotische Entwicklungen. Besondere Aufmerksamkeit ist den Besselreihen gewidmet. Der dritte Teil behandelt die Anwendungen. Zunächst handelt es sich besonders um Fragen der Zahlentheorie, Diophantische Gleichungen, Dirichlets Satz über die Primzahlen in einer arithmetischen Reihe, dann sei etwa die Behandlung der Keplerschen Gleichung erwähnt und schließlich werden einige Eigenwertaufgaben behandelt.

Das Bestreben des Verf., der Fremdwörterüberwucherung in der mathematischen Terminologie entgegenzutreten, verdient hervorgehoben zu werden, mag auch manchmal des Guten zu viel getan worden sein. Es ist fraglich, ob sich Restbruch statt Differenzenquotient oder Wurzelmerkmal statt Wurzelkriterium durchsetzen werden. Dagegen wird statt der üblichen Bezeichnung Verdichtungssatz von Cauchy Kondensationskriterium gewählt. Stellenweise könnte man überhaupt an der Formulierung Anstoß nehmen (z. B. S. 137 steht gleichsam als Merksatz: „Jede monotone Funktion ist integrabel."). Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese unbedeutenden Dinge viele Vorzüge, die lebendige Darstellung, in keiner Weise beeinträchtigen. Wer eine Monographie über spezielle Fragen der subtileren Theorie sucht, verkennt des Verf. Absicht. Wenn man jedoch an gediegener Kenntnis der grundlegenderen Tatsachen interessiert ist und die Querverbindungen zu anderen Gebieten im Auge hat, kommt man voll auf seine Rechnung. Zur Stoffauswahl sei noch bemerkt, daß man vielleicht einmal an einen Hinweis auf die wichtigsten Summierungsverfahren denken könnte — auch im Hinblick auf die Anwendungen. Das hübsche Buch kann man sehr empfehlen.

L. Schmetterer, Wien

Einführung in die Funktionentheorie. Von *L. Bieberbach*. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 43 Abb., 220 S. Bielefeld: Verlag für Wissenschaft und Fachbuch. 1952. DM 12.60.

Es sind gerade 30 Jahre vergangen, seit der „Kleine Bieberbach" im Teubner-Verlag das Licht der Welt erblickte. Nun hat er bereits die zweite Nachkriegsauflage erlebt und es ist nicht ohne Reiz, das Baby von 1922 mit dem ausgereiften Mann von heute zu vergleichen. Da stellt man zunächst eine Verdoppelung des Umfanges fest, muß aber dann mit Erstaunen feststellen, daß das Inhaltsverzeichnis der Zahl der Paragraphen nach völlig unverändert ist und bis auf eine kleine Abweichung auch die Überschriften die alten geblieben sind. Das Kind ist also so wohlorganisiert zur Welt gekommen, daß seine Entwicklung die vorhandenen Anlagen nur auszugestalten brauchte. Das hat es aber auch in wünschenswerter Weise getan und man findet im einzelnen überall methodische wie inhaltliche Verbesserungen. So wird das Buch weiterhin seine Beliebtheit bei den Studierenden bewahren und als einer der besten unter den kurzen Leitfäden der Funktionentheorie zu bezeichnen sein.

J. Radon, Wien

Einführung in die Funktionentheorie. Von *H. Dörrie*. Mit 64 Abb., 559 S. München: R. Oldenbourg. 1951. DM 48.—.

Wir verdanken dem Verfasser bereits eine Reihe verdienstvoller Lehrbücher über elementare Gebiete der Mathematik, die sein pädagogisches Geschick bewiesen haben. Er hat sich nun an die wesentlich schwierigere Aufgabe gewagt, ein Lehrbuch der Funktionentheorie zu schreiben und man darf sagen, daß dieser Versuch ein recht erfreuliches Ergebnis gezeitigt hat. Jedenfalls erfüllt sein Buch in vollem Maße den Zweck, den der Verfasser im Auge gehabt hat, nämlich dem Ingenieur eine gut lesbare und dabei strenge Einführung in das für technische Anwendungen sicher noch nicht nach Gebühr ausgenützte Gebiet in die Hand zu geben. Für eine „Einführung" bietet das Buch übrigens recht viel, so den großen Picardschen Satz, Elliptische Funktionen einschließlich der Thetas und der einfachsten Modulfunktionen, sogar die Riemannsche Zetafunktion wird bis zum Beweis der einfachsten Sätze über die Nullstellen be-

handelt. Man sieht, der Verfasser ist Schwierigkeiten nicht aus dem Weg gegangen; er hat es aber fertiggebracht, auch komplizierte Beweise durch liebevolle und eingehende Darstellung dem Verständnis des Lesers zu erschließen. Dem Zweck des Buches entsprechend kommen auch die Anwendungen zum Wort (Kartenprojektion, Potentialströmung in der Ebene, Joukowskiprofil). Vielleicht entschließt sich der Verfasser bei einer Neuauflage, auch Übungsaufgaben aufzunehmen, der Wert des Buches für das Selbststudium, für das es durch seine ausführliche Darstellungsweise besonders zu empfehlen ist, würde dadurch noch bedeutend erhöht.

Die Anordnung des Stoffes weicht ziemlich stark von der üblichen ab. So wird nach dem Integralsatz von Cauchy und seinen unmittelbaren Anwendungen sogleich der Satz von Picard (nach der Methode von Bloch-Landau) hergeleitet, während der Konvergenzsatz von Weierstrass erst wesentlich später bewiesen wird, die algebraischen Funktionen kommen vor der Behandlung der analytischen Fortsetzung zur Darstellung usw.

Es mag noch einiges angeführt werden, womit der Referent nicht einverstanden ist. Daß für den Zweck des Buches auf topologische Feinheiten verzichtet werden mußte, ist klar; dann darf man aber in der Formulierung der Sätze nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß die Beweise nur unter geeigneten — in der Praxis stets zutreffenden — Voraussetzungen ausreichend sind. Dieser Vorwurf richtet sich in erster Linie gegen die Darstellung des Cauchyschen Satzes und seines Beweises nach Goursat; dort vermisse ich auch den Hinweis auf die Existenz des unbestimmten Integrals einer in einem einfach zusammenhängenden Bereich regulären Funktion. Auf S. 69 wird eine Funktion im Punkt z als regulär bezeichnet, wenn sie dort eine Ableitung hat, was bekanntlich durchaus unzweckmäßig ist. Auf S. 195, wo die Definition der Regularität wiederholt wird, steht das richtige. Eine Reihe abkürzender Bezeichnungen, die höchstens drucktechnisch von Vorteil sein mögen, machen sich störend bemerkbar; warum man statt -1 ι und statt 2π o schreibt bzw. druckt, ist nicht einzusehen und führt leicht zu Mißverständnissen.

Im ganzen ist das Buch als eine auch für den Anfänger geeignete, nicht in den Anfängen steckenbleibende Einführung durchaus zu empfehlen.

J. Radon, Wien

Funzioni Ellitiche. Von *F. Tricomi*. Zweite Auflage. IX, 343 S. Bologna: N. Zanichelli. 1951. Lire 4500.—.

Das Buch, dessen erste Auflage eine 1948 erschienene deutsche Bearbeitung durch M. Krafft erfahren hat, und das nun in einer neuen italienischen Fassung vorliegt, hat in erster Linie zum Ziel, die Theorie so weit zu entwickeln, als das für die Anwendungen in Physik und Technik nötig ist und dann die Anwendung an einigen geeigneten Beispielen vorzuführen. Dementsprechend werden die Funktionen von Weierstrass und die von Jacobi gleichmäßig nebeneinander behandelt, wobei durch tabellarische Zusammenstellungen dem Leser die Übersicht über die Menge der Formeln erleichtert wird. Auch am Schluß des Buches findet sich eine nach Kapiteln geordnete Übersicht über den gesamten Formelapparat der Theorie. Mit graphischen Darstellungen, die z. T. den Funktionentafeln von Jahnke und Emde entnommen sind, ist nicht gespart. Die mehr algebraischen Teile der Theorie treten naturgemäß zurück: so wird von der Transformationstheorie nur das Wichtigste über Transformationen zweiter Ordnung gebracht, Modulfunktionen werden nur an dem Beispiel $J(\tau)$ erläutert. Das letzte Kapitel ist den Anwendungen gewidmet. Nach einem Exkurs über

die zwecks numerischer Rechnung zur Verfügung stehenden Tafeln werden zunächst einige klassische Aufgaben behandelt (Rektifikation der Kegelschnitte, Geodätische Linien des Drehellipsoids, Biegung eines Stabes, Pendel) dann das das für die Aerodynamik wichtige Problem der konformen Abbildung eines Kreisringes auf einen von zwei Parallelschlitzen begrenzten Bereich gelöst und eine vom Verfasser stammende Berechnung des Jahresmittels der Sonnenstrahlung in Abhängigkeit von der geographischen Breite durchgeführt. Da die einzelnen Probleme jeweils bis zur numerischen Auswertung geführt werden, erhält der Leser eine gute Anleitung zur selbständigen Inangriffnahme derartiger Aufgaben.

Das schöne Buch kann allen, die mit elliptischen Funktionen zu tun haben, wärmstens empfohlen werden.

J. Radon, Wien

Die Fakultät und verwandte Funktionen. Von *F. Lösch* und *F. Schoblik*. VI, 205 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ 4.03.

Das Buch will eine ausführlichere Einführung in die Theorie der Gammafunktion geben als dies in den Lehrbüchern über spezielle Funktionen meist geschieht. Seit Nielsens Buch von 1906 ist in deutscher Sprache keine solche Darstellung erschienen und darum sicher ein Bedürfnis dafür vorhanden. Für die Funktion $\Gamma(z+1)$ wird der Name Fakultät auch bei beliebigem z gebraucht. Ausgehend von der Produktdarstellung der Γ-Funktion werden im ersten Teil des Buches ihre Eigenschaften hergeleitet. Gleich anfangs findet sich auch eine Reliefdarstellung der Γ-Funktion und ihrer Reziproken. Im ersten Teil wird auch eine Anzahl von verwandten Reihen und Integralen behandelt, darunter auch viele weniger bekannte, z. B. eine Reihe von Burnside. Im zweiten Teil wird zunächst die unvollständige Γ-Funktion untersucht, insbesondere ihr asymptotisches Verhalten, sowie mit ihr zusammenhängende Reihen und Integrale. Anschließend werden zahlreiche verwandte Funktionen besprochen, und zwar: Integrallogarithmus, Integralsinus und -cosinus, das Fehlerintegral, die Hermiteschen Polynome und die Funktionen des parabolischen Zylinders. Eine Anzahl der verschiedensten Anwendungen auf theoretische Physik, Technik und Wahrscheinlichkeitsrechnung beschließt das schöne Buch, welches jedem Interessenten bestens empfohlen werden kann.

K. Prachar, Wien

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Durchgerechnete Beispiele. Von *H. Watzlawek*. VI, 70 S. Wien: F. Deuticke. 1952. S 36.—.

Das Buch stellt eine Sammlung von Beispielen gewöhnlicher Differentialgleichungen dar. Die Beispiele werden. dem Leser ausführlich vorgerechnet. Es sind hauptsächlich Beispiele ganz elementarer Art, meist auch mit numerischen Koeffizienten, die hier durchgerechnet werden. Nur in einem Abschnitt, der mit „Integration durch Reihen" überschrieben ist, werden die Reihen für einige nicht elementare Funktionen formal angeschrieben. Das Buch verzichtet auf theoretische Erläuterungen. Es ist vielmehr zur Einübung der elementaren Lösungsmethoden gedacht und kann als solches jedem Studierenden empfohlen werden. (Auf einen störenden Irrtum sei verwiesen: In Beispiel 248 kann für die Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ wohl nicht von einer charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + f(x)\lambda + g(x) = 0$ gesprochen werden.)

K. Prachar, Wien

Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Von *G. Hoheisel*. Zweite Auflage. (Sammlung Göschen: Nr. 1053.) 124 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1952. DM 2.40.

Die Aufgabensammlung stellt eine wertvolle Ergänzung zu den beiden Bänden des Verfassers über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen dar. Sie enthält kurz auseinandergesetzt die Theorie der Differentialgleichungen, vor allem Lösungsmethoden, eine große Anzahl von Aufgaben, besonders über gewöhnliche Differentialgleichungen, wertvolle Ratschläge zu den speziellen Aufgaben über deren zweckmäßige Auflösung und die Lösungen der Aufgaben. Es ist erfreulich, daß die Sammlung Göschen in rascher Folge ihre beliebten Bände herausbringt.

N. Hofreiter, Wien

Lezioni di Analisi. Von *F. Severi* und *G. Scorza-Dragoni*. VI, 255 S. Bologna: C. Zuffi. 1951.

Der dritte Band des groß angelegten Werkes bringt die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Randwertaufgaben bei solchen sowie eine erste Einführung in die Theorie der trigonometrischen Reihen und einiges aus der Flächentheorie. Eine große Anzahl von Ergebnissen ist in den kleingedruckten Ergänzungen zusammengestellt, die mit „complementi ed esercizi" überschrieben sind. Hier wird in kurzer und klarer Form über Dinge berichtet, die oft weit über den Rahmen eines solchen Buches hinausgehen. In den ersten beiden Kapiteln wird die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Reellen behandelt. Hier finden sich Existenz und Eindeutigkeitssätze, die wichtigsten speziellen Gleichungstypen und die Abhängigkeit von Parametern und Anfangswerten. In den sehr reichhaltigen Komplementen werden u. a. behandelt: Existenzsätze von Caratheodory, Fortsetzbarkeit von Integralkurven, Vergleichssätze für Integralkurven, Cauchyscher Existenzbeweis, Formen des Cauchyschen Integralsatzes bei Funktionen mehrerer Variablen, algebroide Funktionen, Differentialgleichungen im Komplexen, Integrale auf algebraischen Mannigfaltigkeiten, asymptotisches Verhalten von Integralkurven, Laplacetransformation usw. In Kap. 3 werden die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen besprochen, insbesondere die Sturm-Liouvilleschen Sätze. Hier werden, z. B. beim Beweis eines Lemmas von Kellogg, auch Sätze der algebraischen Geometrie benützt, die im Buche selbst nicht bewiesen sind. In den Komplementen finden sich u. a. Ausführungen über die Greensche Funktion, der Übergang zu den Integralgleichungen und andere Typen von Randwertproblemen. Die beiden letzten Kapitel, die die trigonometrischen Reihen und einiges aus der Flächentheorie bringen, sind als eine erste Einführung gedacht. Auch hier werden einige weitergehende Fragen in den Komplementen besprochen.

Das Werk zeichnet sich durch lebendigen Stil aus und geht in der Darstellung oft originelle Wege. Man kann auf die weiteren Bände gespannt sein.

K. Prachar, Wien

An Introduction to Applied Mathematics. Von *J. C. Jaeger*. Mit 95 Textabb., XIII, 445 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1951. Geb. 35 s. net.

Dieses Buch beschäftigt sich nicht, wie der Titel vermuten ließe, mit der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen, obwohl diesem Gegenstand das letzte Kapitel gewidmet ist, sondern mit der Anwendung der Theorie der gewöhnlichen (und auch der partiellen) Differentialgleichungen auf physi-

kalische und technische Probleme. Im neunzehnten Jahrhundert nannte man das Gebiet, welches hier behandelt wird, gern mathematische Physik oder physikalische Mathematik. So finden wir hier ausführlich mechanische Schwingungen, elektrische Stromkreise, Elastizitätstheorie, Beispiele aus der Punktmechanik und Mechanik starrer Körper behandelt. Selbstverständlich nehmen Fouriersche Reihen und Integrale, Besselsche und Legendresche Funktionen ihren angestammten Platz ein. Das Reizvolle, wie es ja Tradition bei angelsächsischen Büchern ist, und das Wertvolle an diesem Buch ist die Fülle der Beispiele. Man lernt mathematische Technik, die Kunst, Aufgaben der Technik und Physik anzupacken und zu lösen. Es muß noch hervorgehoben werden, daß so aktuelle Gebiete wie Servomechanismen und Schwingungen nicht linearer Systeme (van der Polsche Gleichung, Methode von Kryloff und Bogoliuboff) eine sehr klare Darstellung finden. Das Buch kann jedem Physiker, Techniker, aber auch dem Mathematiker nur empfohlen werden. Die Ausstattung des Buches ist sehr gut.

E. Hlawka, Wien

Erläuterungen und Beispiele für den Gebrauch der vierstelligen Tafeln zum praktischen Rechnen. Von *Ph. Lötzbeyer*. 32 S. Berlin: W. de Gruyter. 1951. DM 3.60.

Um mühsame und oft sich wiederholende Rechnungen zu vermeiden, ist es zweckmäßig, Tafeln herzustellen, mit deren Hilfe sich die Rechnungen wesentlich vereinfachen. Zahlen- und Logarithmentafeln sind allgemein bekannt. Man kann natürlich einfache Merkregeln zum Gebrauch der Tafeln lernen. Das Rechnen wird dann aber allzubald ganz schematisch. Es ist doch besser, die Tafeln gründlich kennen und verstehen zu lernen. Die Handhabung erfolgt dann mit mehr Verständnis. Diese Schrift bringt ausführliche Erläuterungen und Beispiele zum Gebrauch von Zahlen- und Logarithmentafeln. Sie berichtet auch über Genauigkeit beim Tafelrechnen und über graphisches Rechnen. Die Darstellung ist für jedermann leicht verständlich.

N. Hofreiter, Wien

Altes und Neues vom Kreis. Von *W. Lietzmann*. Zweite Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek: I/87.) 54 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ —.51.

Das Heft enthält gegenüber der ersten Auflage einen neuen Abschnitt, den „Sehnen- und Sekantensatz" betreffend. Mit liebevoller Sorgfalt wurde die Quadratur des Kreises behandelt und hier insbesondere die rationalen Methoden und die quadrierbaren Möndchen. Daß auf viele Dinge nicht eingegangen werden konnte, obwohl sie mit elementaren Hilfsmitteln zu erledigen sind, und im Brennpunkt des Interesses stehen, erklärt sich wohl aus der Beschränkung des verfügbaren Raumes. Am Schluß des Heftes befindet sich ein ziemlich ausführliches Literaturverzeichnis, in dem merkwürdigerweise der Name Jakob Steiners fehlt.

J. F. Lewandowski, Wien

Der Pythagoreische Lehrsatz. Von *W. Lietzmann*. Sechste Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek: I/2—3.) 85 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ —.79.

Die vierte Auflage dieses Büchleins erhielt in Mh. Math. Phys. 39, 25 (1932), eine wohlwollende Rezension. Der verdienstvolle Autor hat inzwischen manche Zusätze, neue Beispiele und Literaturangaben eingefügt. Die für das kleine Heft überraschend hohe Auflagenziffer spricht wohl am besten für seine Brauchbarkeit als Unterrichtsbehelf.

J. F. Lewandowski, Wien

F. W. Küster: Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker, begründet von F. W. Küster, fortgeführt von A. Thiel, neu bearbeitet von K. Fischbeck. 61.—64., verbesserte und vermehrte Auflage. 308 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1951. DM 14.80.

„Ziel dieser Rechentafeln ist es, für die im chemischen Laboratorium häufig vorkommenden Rechnungen die nötigen Unterlagen in kürzester Form, anwendungsbereit zusammenzustellen. Darüber hinaus sollen auch die einzelnen Rechenmethoden so erläutert werden, daß dem Praktiker alle unnötigen, das Rechenverfahren betreffenden Überlegungen erspart bleiben." Dieses Ziel wurde in vorbildlicher Weise erreicht. Teil I enthält die Tafeln, Teil II die Erläuterungen. Zuletzt finden sich noch fünfstellige Logarithmentafeln im Buch und vierstellige als Beilage. Die Anordnung im Buch ist ganz besonders praktisch. Gegenüber früheren Auflagen wurden einige Ergänzungen und Verbesserungen vorgenommen. Die hohe Auflagenzahl zeigt von großer Beliebtheit der Tafeln. Sie sind ein wichtiges und unentbehrliches Hilfsmittel für den Chemiker.

N. Hofreiter, Wien

Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. Von *A. Rohrberg*. Neunte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: I/23.) Mit 15 Textabb., 64 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ —.34.

In breiter, jedermann verständlichen Art wird der Rechenstab beschrieben und gezeigt, wie man mit ihm vorteilhaft rechnet. Der Verf. gibt viele praktische Winke. Dem Leser wird empfohlen, alles durchzuarbeiten. Die neue Auflage enthält mehr Figuren und beschränkt sich auf die jetzt üblichen Rechenstäbe, von denen das System Darmstadt am beliebtesten zu sein scheint.

N. Hofreiter, Wien

Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von *P. Zühlke*. Dritte Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek: I/11.) 41 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ —.51.

Jedem praktisch zeichnenden Geometer widerfährt auf Schritt und Tritt das Mißgeschick, daß einzelne Punkte oder Linien außerhalb des Zeichenblattes fallen. Wie trotzdem die Zeichnung zu Ende geführt werden kann, das lehrt in den häufiger vorkommenden Fällen der Verfasser des kleinen Buches. Bei der großen Vertrautheit des Autors mit der in Frage kommenden Materie und bei seiner klaren Diktion waren keine wesentlichen Änderungen gegenüber den früheren Auflagen notwendig.

J. F. Lewandowski, Wien

Das Parallelenproblem und seine Lösung. Von *M. Zacharias*. Zweite Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek: I/92.) 42 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. $ —.43.

Die erste Auflage des Büchleins wurde in Mh. Math. Phys. **49**, 24 (1941), besprochen. Die zweite Auflage unterscheidet sich nur in den letzten Seiten von der ersten. Hier will der Autor dem mathematischen Laien eine Idee von der Einsteinschen Auffassung des Raumes geben. Das kleine Werk kann den Schülern der beiden obersten Klassen unserer Mittelschulen bestens empfohlen werden.

J. F. Lewandowski, Wien

Einführung in die projektive Geometrie. Von *M. Zacharias*. Vierte Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek: I/6.) Mit 21 Textabb., 54 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951.

Das Buch ist für Anfänger geschrieben. Es führt seine Leser rasch und leicht in die projektive Geometrie ein. Man lernt die wichtigsten Begriffe und Lehrsätze sowohl ihrem Inhalt wie ihrer geschichtlichen Entsicklung nach kennen. Die fünf Kapitel zeigen in großen Zügen was die fünf Geometer: Desargues, Pascal, Poncelet, Steiner und v. Staudt, auf dem Gebiete der projektiven Geometrie geleistet haben. Gegenüber früheren Auflagen ist die vierte durch einen kleinen Abschnitt über Involution erweitert worden. Das Buch ist auch heutzutage als Einführung sehr gut geeignet.

N. Hofreiter, Wien

Colloque de Géométrie différentielle. 233 S. Liège-Paris: Centre Belge de Recherche mathématique. 1951. bfr. 350.—, ffr. 2450.—.

Das belgische „Centre de Recherche mathématique" hat nun auch die Vorträge veröffentlicht, die im Kolloquium über Differentialgeometrie gehalten wurden. Vorher wurden bereits die Vorträge der Kolloquien über algebraische Geometrie und Topologie der gefaserten Räume gedruckt. Es ist sehr begrüßenswert, daß die mathematische Forschung in dieser Weise gefördert wird. Insgesamt sind es sechzehn Vorträge, in denen bekannte Fachleute über Fragen aus ihrem Arbeitsgebiet berichteten. Und zwar: E. Bompiani über topologische Differentialinvarianten mit gewissen Anwendungen auf die algebraische Geometrie und partielle Differentialgleichungen, J. Favard über räumliche Deckelprobleme, A. Terracini über den Begriff der Inzidenz bei unendlich benachbarten Ebenen, J. A. Schouten über die V_n-normalen Hauptrichtungen eines Tensors, P. Vicensini über gewisse spezielle Netze und Kongruenzen, J. Haantjes über Infinitesimalgeometrie in metrischen Räumen, A. Lichnerowicz über Kählersche Geometrie, E. Bompiani über Riemannsche Geometrien höherer Art, N. Hlavaty über gewisse Elemente höherer Ordnung, H. Kuiper über konforme Eigenschaften Einsteinscher Räume, F. Simonart über Textilgeometrie, van Bouchout über Netze aus Flächen, F. Backes über das „pentasphère mobile", L. Godeaux über Flächen mit endlicher Laplacescher Kette, O. Rozet über gewisse Geradenkongruenzen, R. Debever über vierdimensionale Mannigfaltigkeiten, die mit den elektromagnetischen Grundgleichungen verknüpft sind.

Diese Übersicht zeigt bereits die große Mannigfaltigkeit der behandelten Gebiete. Die Vorträge geben ein lebendiges Bild von den Problemen, mit denen sich die differentialgeometrische Forschung heute beschäftigt.

K. Prachar, Wien

Nadirketten mit Streckenmessung (Aeropolygonierung). Von *K. Reicheneder*. (Veröffentlichungen des Geodätischen Institutes in Potsdam: Nr. 6.) Mit 8 Abb. und 7 Tab., VI, 40 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1951. DM 4.—.

Mit Hilfe der Winkel, die im Nadir aufeinanderfolgender, sich überdeckender Luftbilder gemessen werden, kann man eine Triangulation aufbauen, wenn mindestens die Länge einer Seite der so entstehenden Rautenkette bekannt ist; liegen die Längen weiterer Seiten vor, so läßt sich dadurch die Genauigkeit der Radialtriangulierung steigern.

In konsequenter Verfolgung dieses Gedankens schlägt nun Reicheneder für die Nadirtriangulierung eine Methode vor, die dem Vermessungsingenieur bei

der Verwendung von Polygonzügen geläufig ist. Da aber aus praktischen Gründen an terrestrische Längenmessungen nicht gedacht werden kann, sollen die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nadiren gelegenen Strecken im Luftbild ausgemessen werden, was jeweils zweimal möglich ist, da ja sich überdeckende Aufnahmen vorliegen müssen.

Obwohl man an die Genauigkeit solcher Längenbestimmungen keine hohen Ansprüche wird stellen dürfen, können sie doch eine Verbesserung der Genauigkeitsverhältnisse bei der Nadirtriangulierung herbeiführen. Demnach untersucht Reicheneder zunächst die Genauigkeit solcher Streckenmessungen und weiter die mit derartigen Nadirpolygonzügen erreichte Genauigkeit der eingeschalteten Punkte.

Seine Arbeit gliedert sich in fünf Abschnitte. Zunächst werden die in einer früheren Arbeit des Verfassers entwickelten Formeln zur Maßstabsübertragung in Rautenketten für Vergleichszwecke zusammengestellt. Anschließend wird die Genauigkeit der Streckenmessung behandelt; nach grundlegenden Bemerkungen folgen Untersuchungen über einfache und doppelte Streckenmessung. Dabei werden sowohl die Messungsfehler wie auch die Unsicherheit der Flughöhe und der Kammerneigung mit dem Ergebnis untersucht, daß der Einfluß des Höhenfehlers allen anderen Fehlereinflüssen gegenüber hervortritt. Die doppelte Streckenmessung führt, wie zu erwarten ist, zu einer Genauigkeitssteigerung, aber auch hier steht und fällt die Brauchbarkeit der Aeropolygonierung mit der Kenntnis der absoluten Geländehöhe, während die Höhenunterschiede innerhalb gewisser Grenzen von geringerer Bedeutung sind.

Im dritten Abschnitt wird die praktische Durchführung der Streckenmessung besprochen. Nach Potenzreihenentwicklungen für Polygonseiten, die nicht von Nadirpunkten ausgehen, werden die für die praktische Auswertung benötigten Rechenformeln entwickelt und ein Formular zu ihrer raschen Auswertung angegeben.

Der nächste Abschnitt enthält Untersuchungen über das Nadir-Polygon. Eingangs wird in gedrängter Form auf die Theorie des eingehängten Polygonzuges eingegangen; die dabei erzielten Ergebnisse gelangen anschließend auf den Nadirzug zur Anwendung. Dabei tritt die Genauigkeit der Seitenmessung gegenüber jener bei der Winkelbestimmung weit zurück; Fehlerbetrachtungen ermöglichen einen Vergleich von Polygon- und Rautenkette. Man erkennt leicht, daß die Polygonierung gegenüber dem Rautenaufbau mit wachsendem Abstand vom nächsten Anschlußpunkt gewinnt; wo sich beide Verfahren das Gleichgewicht halten, hängt im wesentlichen vom Verhältnis des Richtungsmeßfehlers zum Längenmeßfehler ab.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß, wenn man der Nadirtriangulation wegen ihrer beschränkten Genauigkeit überhaupt eine praktische Bedeutung zubilligt, auch die Aeropolygonierung Beachtung verdient. Beide Methoden liefern den gleichen Querfehler eines neu eingeschalteten Punktes; bezüglich des Längsfehlers ist die Polygonierung bei langen Ketten sogar überlegen, aber andere Nachteile vermindern wieder den Wert dieser Methode.

Aus der Überlegung heraus, daß der Längsfehler beim freien Polygonzug nur mit der Quadratwurzel aus der Streckenzahl zunimmt, wogegen bei freien Rautenketten ein fast quadratisches Anwachsen des Längenfehlers entsteht, erwartet sich Reicheneder aus der Kombination beider Methoden, also aus Rautenketten mit Streckenmessung ein günstiges Ergebnis und bestätigt diese Vermutung durch die Untersuchung des letzten Abschnittes. Die bei einem solchen Verfahren auftretenden überschüssigen Messungen führen zu zwei Bedingungen in jeder Raute und damit zu einem Problem der Ausgleichsrechnung.

Obwohl der erzielte Genauigkeitsgewinn dabei nicht unerheblich ist, wird der Wert dieser Methode wegen der umfangreichen Rechenarbeiten sehr gedrückt.

Ein Zahlenbeispiel am Schlusse der umfangreichen und gut durchdachten Arbeit ergänzt und erläutert die vorangehenden Ausführungen und illustriert an zwei Abbildungen die Abnahme der Längs- und Querfehler bei der Kombination beider Methoden in recht anschaulicher Weise.

F. Hauer, Wien

Proceedings of the Second Canadian Mathematical Congress in Vancouver 1949. 259 S. Toronto: The University of Toronto Press. 1951. $ 6.—.

Es scheint in Canada Usus zu werden, alle vier Jahre einen Kongreß und alle zwei Jahre ein Sommer-Seminar abzuhalten. Das Sommer-Seminar dauert 3 Wochen und bringt mehrstündige Vorlesungen aus einem Spezialgebiet der Mathematik. So wurde 1947 Algebra und Zahlentheorie ausgewählt, 1949 mathematische Physik. Es scheint dies eine ähnliche Einrichtung in Canada zu sein wie in Oberwolfach in Deutschland. Nur ist das Seminar in Canada auf viel breiterer Basis und daher auch viel besser besucht. (120 Teilnehmer.) Der Kongreß dauerte eine Woche und wurde von 160 Mathematikern besucht. Es fanden kleinere und größere Vorträge aus verschiedenen Gebieten der Mathematik statt, wobei allerdings mathematische Physik bevorzugt war, was mit dem unmittelbar vorangehenden Seminar zusammenhängt. Jedermann interessieren dürften die drei Vorträge über Mathematik in Frankreich, Indien und Polen. Dank sehr stattlicher Zuwendungen konnte auch dieser Kongreß in glanzvoller Weise begangen werden und ein sehr gut ausgestatteter Band darüber berichten.

N. Hofreiter, Wien

Correction to Notes on Abstract Distance Geometry II*

David Ellis, Gainesville, USA

On page 186, line 4 from the bottom, in the above note we find "Now if a, $b \in S$ it is easily seen etc.". Although this point appears obvious, Professor *L. M. Kelly* has shown me a counterexample in which not only this point but Theorem 1. itself fails. This invalidates also Theorem 2 and 4 which hang on Theorem 1. Theorems 3 and 5 of the note are, however, valid. The only case in which the writer has actually been able to verify Theorem 1 is for a ground space whose metroid is a group, of nilpotents. In fact, one may show that a ground space whose metroid is a semigroup with unit has a simply transitive group of motions if and only if the metroid consists of nilpotents.

In der Zeit vom 9. bis 14. September 1952,
findet in Salzburg der

dritte österreichische Mathematikerkongreß

statt, der nach den bisherigen Anmeldungen
das größte internationale Mathematikertreffen
in Europa seit 1936 zu werden verspricht.

* This journal, vol. 55 (1951), pp. 185—187.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges.m.b.H. Innsbruck, Innrain 27—29.

Die Welt der Vektoren

Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren

Von

Dr. Ing., Dipl. Ing. **Franz Ollendorff**

Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums
The Hebrew Technical College, Haifa (Israel)

Mit 68 Textabbildungen. VIII, 470 Seiten. Lex-8°. 1950

S 189.—, DM 37.50, $ 9.—, sfr. 39.—; Ganzleinen S 200.—, DM 40.—, $ 9.50, sfr. 42.—

"... Unter allen bisher vorliegenden, zum Teil sehr ausgezeichneten deutschsprachigen Lehrbüchern der Vektor- und Tensorrechnung hat das vorliegende ein ganz besonderes, eigenständiges Gepräge. Es ist ohne Zweifel in der ganzen Konzeption das universellste Buch über Vektoren, Tensoren und Operatoren, das wir gegenwärtig besitzen, und bringt nicht bloß Dinge, die man in den sonstigen landläufigen Lehrbüchern ebenfalls findet. Neben der klassischen Algebra und Analysis der Vektoren und Tensoren werden in ausführlicher Weise alle möglichen Anwendungen auf Mechanik und Physik berücksichtigt. Die staunenswert vielseitige Art des durchaus originellen Buches, das sich durch die ausgezeichnete Eigenart, in der es klassische und moderne Dinge verknüpft, von selbst bestens empfiehlt, kann am besten durch einen Auszug aus dem Inhaltsverzeichnis gekennzeichnet werden. Die lebendige sprachliche Darstellung und die ausgezeichnete Ausstattung seien ausdrücklich hervorgehoben."

Archiv der Mathematik

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

herausgegeben von

K. W. F. Kohlrausch, Graz, und **H. Thirring**, Wien

Schriftleitung: **P. Urban**, Graz

Soeben erschien:

Band 5, Heft 4, Schlußheft. (Ausgegeben im Juni 1952.) Mit 44 Abbildungen. 148 Seiten. S 144.—, DM 29.80, $ 7.10, sfr. 30.80

Inhalt:

Bergmann, W. H. Untersuchungen über Entladungen in magnetischen Feldern. — **Desoyer, K. V.** Über das Verhalten ferromagnetischer Partikeln in einem magnetischen Drehfeld. — **Scheu, Elisabeth** und **K. V. Desoyer.** Weitere Untersuchungen an Partikeln, die unter dem Einfluß des Lichtes bei Gasdrucken um 10 Torr kreisen. — **Stockinger, F.** Bewegungen von Materieteilchen im Feld eines Elektromagneten. — **Sexl, Th.** Zur Theorie der *Laguerre*schen Differentialgleichung. — **Eder, G.** Schwierigkeiten der *March*schen Theorie einer universellen Länge. — **Roesler, F. C.** Zur Theorie des Ramaneffektes. — **Hinteregger, H.** Elektrophotometer mit Vakuumzelle und Wechselstromverstärkung. — **Seidl, F.** und **H. Fellner-Feldegg.** Schallabsorption in beschalltem Transformatorenöl. — **Ledinegg, E.** und **P. Urban.** Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen elektrodynamischer Systeme. — **Voetter, H.** und **F. Wollrab.** Zuordnung der Gerüstschwingungen von 1, 3-Dioxan und Molekülstruktur von Acetaldoxan. — **Kronenberg, St.** Streuung schneller Elektronen an leichten Atomkernen. — **Baumann, K.** Bericht über die neuere Entwicklung der Quantenelektrodynamik I. — **Schaefer, C.** Erwin Lohr †. — Bemerkung zu der Arbeit „Corbinoeffekt und magnetische Widerstandsänderung in Wismut" von *L. Halpern* und *K. M. Koch.*